高１・高２ ハイレベル数学Ⅰを受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ 高１・高２ハイレベル数学Ⅰの講座へ。この講座は

「基本問題だけではなく，応用問題を自力で解けるようになりたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ⅰでは，高校数学の礎（いしずえ）とも言える内容を学習します。この講座では，それまでに学び，また標準的な問題を解くことで自分のものになったはずの知識・技能を振り返りながら，その活用の仕方を，問題を通じてじっくり深く学んでいきます。

この講座を受講いただくことで，知識・技能のもつ意味や，その使い方，使う場面を体験することができます。また，なぜそういった手法を取るのか，それによって何が解決できるのか，を学ぶことで，解法に対する納得感が高まります。そのため，解法を丸暗記する必要がなく，さらに，今後の学習で出会う様々な問題の中で広く使える数学的な見方・考え方が身についていきます。この講座を通じて数学Ⅰと新たな気持ちで向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業をしています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことなんだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に学んだ知識・技能や解法の一部または全部を使うことで，その真意がわかる，というのも数学ならではですし，気になった時点で前に戻り，改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です。

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　数と式

第１講　数と式
PART1　因数分解
PART2　式の値
PART3　１次不等式

第２講　命題と証明
PART1　命題と条件
PART2　命題と証明
PART3　条件の否定と命題の否定，必要条件から考える

第２章　２次関数

第３講　２次関数とグラフ
PART1　１次関数のグラフと最大値，最小値
PART2　放物線の平行移動・対称移動
PART3　２次関数の係数の符号

第４講　２次関数の最大・最小，２次関数の決定
PART1　２次関数の最大・最小
PART2　２変数関数の最大・最小，４次関数の最大・最小
PART3　２次関数の決定

第５講　２次方程式
PART1　２次関数のグラフと x 軸の共有点
PART2　関数のグラフと x 軸の共有点
PART3　２次方程式の共通解

第６講　２次不等式
PART1　２次不等式の解法とその解
PART2　つねに成り立つ不等式
PART3　２次方程式の解の存在範囲

第７講　２次関数の様々な問題
PART1　ある範囲でつねに成り立つ不等式
PART2　絶対値を含む２次方程式の解の個数
PART3　２次方程式の解の存在範囲（少なくとも１つ）

第３章　図形と計量

第８講　三角比
PART1　鋭角の三角比
PART2　$a=c\ \sin A$，$b=c\ \cos A$，$a=b\ \tan A$
PART3　鈍角の三角比

第９講　正弦定理，余弦定理，三角形の面積
PART1　三角形の形状
PART2　三角形の決定
PART3　三角形の面積

第 10 講　図形の計量
PART1　角の二等分線の長さ
PART2　円に内接する四角形の面積
PART3　３辺の長さが等しい四面体の高さと体積

第４章　データの分析

第 11 講　データの分析
PART1　箱ひげ図
PART2　変量の変換
PART3　データの修正による変化

講座の受講の仕方

ここでは, 効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力をつけていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに３つのPART(セクション)に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「講義問題」(1，2など)

⇒　そのPARTで学ぶべき内容を含んだ問題。

PARTによっては，1[1]，1[2]のように分かれている場合もあります。

「Point Pickup」

⇒　「講義問題」を解くために必要な知識・技能や考え方，方針を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。「講義問題」の予習は必要ありませんが，あらかじめ自分で解けるところまで解いてから，「動画」を見ても構いません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら, テキストと筆記用具を手元におき, 動画を再生してください。そして, 真剣に受講して, 先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，１つまたは複数のチャプターに分かれています。

（例）　第１講　数と式

PART1　因数分解　…　【講義問題1】

PART2　式の値　　…　【講義問題2[1]】・【講義問題2[2]】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【講義問題】のチャプターで，講義問題を解く上で必要な知識，用語，公式等を「Point Pickup」を交えながら説明します。その後，講義問題を解説していきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一時停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書

いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵ 解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照し，また必要に応じて講義問題の動画を見直し，どこに手が止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。最後まで解ききったら，自分で書いた解答を最初から最後まで読み，その流れを把握することをオススメいたします。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「講義問題& Point Pickup を通じて学ぶ」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分程度の受講時間となります。

各講に含まれる３つの PART の受講が終了すると, その講が終了します。時間がない時は, PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

- **「新しい知識や考え方，その使い方や場面を知って，思考の幅を広げる」**
- **「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」**
- **「問題が解けるようになることがゴールではなく，なぜそう解くのかを学ぶ」**

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，応用問題から学んだ経験が少ない人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。ですが，安心してください。この講座は，好きなところで動画を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味をもつのかを考えること，必要なら戻って何度も再生すること。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう 1 つ大切なこと，それは

- **「やっぱり自分はできない」は厳禁！**

だと言うことです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気づいていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この講(PART)から何を知ったか，何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。学んだ記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学びを実感し，学びを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに「**確認問題**」を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，それを活用する練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら，自覚しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まります。これは今後，数学Ⅰを活用するための貴重な経験としてあなたに刻まれていきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分～ 30 分。それを，どの曜日のどの時間帯に何 PART(何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。あなたが学校で時間割に沿って授業を受けるのと同じように，まずはあなたのスケジュールに『スタディサプリ』を受講する時間，数学Ⅰと本気

で向き合う時間，これを組みこんでください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気づき，それが「自信」につながります。

この「高１・高２ ハイレベル数学Ⅰ」は，これまでの学習や問題演習で培った知識・技能を活用する方法や場面を経験するための講座ですが，ご紹介できているのはその方法や場面のほんの一部となります。受講後は，**「高１・高２ トップレベル数学ⅠAⅡB＋C（ベクトル）」**に進んでみてください。自分のもっている知識に，さらにこんな使い方があるのか，という気づきが得られ，その気づきにより，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に拡がる数学Ⅰの世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

[MEMO]

【MEMO】

第 1 講　数と式

PART1　因数分解

1　次の式を因数分解せよ。

(1)　$xy-yz+x^2-zx$

(2)　$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2$

(3)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(4)　x^4+5x^2+9

Point Pickup

(1)　次数の低い方の文字について整理する。

(2)　x，y のどちらについても 2 次式であることから，どちらかの文字について整理する。

(3)　a，b，c のいずれについても 2 次式であることから，いずれかの文字について整理する。

(4)　すべての項の次数が偶数である多項式を「複 2 次式」という。

　　x の複 2 次式の因数分解は，$x^2=X$ とおき換え，必要に応じて平方の差の形を作る。

第 1 講　PART1　確認問題

次の式を因数分解せよ。

1　$-4xy-6yz+2x^2+3zx=(x-\boxed{ア}y)(\boxed{イ}x+\boxed{ウ}z)$

2　$x^2+4xy+3y^2+2x-2y-8$

$=(x+y-\boxed{エ})(x+\boxed{オ}y+\boxed{カ})$

3　$a^2b-a^2c+b^2a-c^2a+b^2c-c^2b=\boxed{キ}$

① $(a+b)(b+c)(c+a)$　② $(a+b)(b+c)(c-a)$

③ $(a+b)(b-c)(c+a)$　④ $(a+b)(b-c)(c-a)$

⑤ $(a-b)(b+c)(c+a)$　⑥ $(a-b)(b+c)(c-a)$

⑦ $(a-b)(b-c)(c+a)$　⑧ $(a-b)(b-c)(c-a)$

4　$x^4-x^2+16=(x^2+\boxed{ク}x+\boxed{ケ})(x^2-\boxed{コ}x+\boxed{サ})$

PART2　式の値

2　［1］ $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ を２重根号をはずして簡単にせよ。また，$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，b を２重根号を用いずに表せ。

［2］ $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$x>1$ とする。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(3)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}$　　(4)　$x-\dfrac{1}{x}$

Point Pickup

［1］ $a>b>0$ のとき，$\sqrt{(a+b)\pm2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}\pm\sqrt{b}$（複号同順）

また，(小数部分)＝(もとの数)－(整数部分)　である。

［2］ $\dfrac{1}{x}=y$ とおくと，

$$x+\frac{1}{x}=\sqrt{7}\iff x+y=\sqrt{7}$$

$$x\cdot\frac{1}{x}=1\iff xy=1$$

である。

よって，基本対称式の値から対称式の値を求める問題と同様の考え方で解く。

第 1 講　PART2　確認問題

1　$\sqrt{86-18\sqrt{5}}$ を 2 重根号をはずして簡単にすると,

$\boxed{\text{ア}}-\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ となる。

また, $\sqrt{86-18\sqrt{5}}$ の整数部分を a, 小数部分を b とすると,

$a=\boxed{\text{ウ}}$, $b=\boxed{\text{エ}}-\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ である。

2　$x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{6}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$x>1$ とする。

(1)　$x^2+\dfrac{1}{x^2}=\boxed{\text{カ}}$

(2)　$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}$

(3)　$x^4+\dfrac{1}{x^4}=\boxed{\text{ケコ}}$

(4)　$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{\boxed{\text{サ}}}$

PART3　1次不等式

3 ［1］ $-1<a<3$，$2<b<5$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) $\dfrac{3a-5}{2}$　(2) $a+b$　(3) $2a-3b$

［2］ 不等式 $4x-3a<-1$ を満たす整数 x の最大値が 5 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

［3］ 次の x についての方程式，不等式を解け。

(1) $||x-4|-3|=5$

(2) $|x+1|+|x-3|<4x$

(3) $ax<x+b$

Point Pickup

［1］ (3) $2a-3b=2a+(-3b)$ として考える。

［2］ x の値の範囲を数直線で考えるとよい。

［3］ (2) 絶対値記号の中の式が 0 以上になる場合と負になる場合で場合分けを行う。

(3) x について整理し，x の係数で両辺を割る際に，x の係数の符号に注意する。

第 1 講　PART3　確認問題

1　$-4<a<5$ のとき，

$\boxed{\text{アイ}}<\dfrac{2a-1}{3}<\boxed{\text{ウ}}$

2　$-4<a<5$，$-3<b<-1$ のとき，

$\boxed{\text{エオ}}<a+b<\boxed{\text{カ}}$

3　$-4<a<5$，$-3<b<-1$ のとき，

$\boxed{\text{キクケ}}<3a-2b<\boxed{\text{コサ}}$

4　不等式 $2a-5x>3$ を満たす整数 x の最大値が -2 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。$\boxed{\text{シ}}$

①　$-\dfrac{7}{2}<a<-1$　　②　$-\dfrac{7}{2}<a\leqq-1$

③　$-\dfrac{7}{2}\leqq a<-1$　　④　$-\dfrac{7}{2}\leqq a\leqq-1$

⑤　$-6<a<-\dfrac{7}{2}$　　⑥　$-6<a\leqq-\dfrac{7}{2}$

⑦　$-6\leqq a<-\dfrac{7}{2}$　　⑧　$-6\leqq a\leqq-\dfrac{7}{2}$

次の x についての方程式，不等式を解け。

5 $||x-1|-2|=3$

$x=$ [ス], [セソ]

6 $|x|+|x-4|<3x$

$x>\dfrac{[タ]}{[チ]}$

7 a，b は定数とする。

$ax<2x+3b$ の解は

$a>$ [ツ] のとき [テ]

$a=$ [ツ] かつ b [ト] 0 のとき　すべての実数

$a=$ [ツ] かつ b [ナ] 0 のとき　解なし

$a<$ [ツ] のとき [ニ]

[[テ], [ニ] の選択肢]

① $x<\dfrac{3b}{a-2}$　　② $x>\dfrac{3b}{a-2}$

③ $x\leqq\dfrac{3b}{a-2}$　　④ $x\geqq\dfrac{3b}{a-2}$

[[ト], [ナ] の選択肢]

① $<$　　② $\leqq$　　③ $>$　　④ $\geqq$

【MEMO】

第 2 講　命題と証明

PART1　命題と条件

1　次の □ に最も適するものを下の選択肢①～④から 1 つ選べ。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための □。

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための □。

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための □。

(4)　$-2 \leqq x \leqq 2$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための □。

(5)　$x+y$，xy がともに有理数であることは，x，y がともに有理数であるための □。

①　必要十分条件である

②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

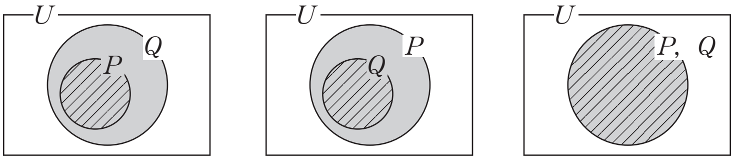
Point Pickup

条件 p，q を満たすもの全体の集合をそれぞれ P，Q とする。

$p \Longrightarrow q$ が真，すなわち $P \subset Q$ ならば，p は q であるための十分条件

$q \Longrightarrow p$ が真，すなわち $Q \subset P$ ならば，p は q であるための必要条件

$p \Longleftrightarrow q$ が真，すなわち $P=Q$ ならば，p は q であるための必要十分条件



p は十分条件　　p は必要条件　　p は必要十分条件

第 2 講　PART1　確認問題

1　x，y，c は実数とする。

$x < y$ は $cx < cy$ であるための [ア]。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

2　a は実数とする。

$a > 0$ は $\sqrt{a^2} = a$ であるための [イ]。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

3　a，b は実数とする。

$ab + 1 = a + b$ は，a，b のうち少なくとも 1 つは 1 である

ための [ウ]。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

4 x は実数とする。

$|x-4|>2$ は，$|x+1|<3$ であるための **エ** 。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

5 x，y は実数とする。

x，y がともに整数であることは，$x+y$，xy がともに整数であるための **オ** 。

① 必要十分条件である
② 必要条件であるが十分条件ではない
③ 十分条件であるが必要条件ではない
④ 必要条件でも十分条件でもない

[MEMO]

PART2　命題と証明

2　(1)　整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(2)　$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，(1)の結果を用いてもよいものとする。

Point Pickup

(1)　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。
これを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

(2)　命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を「背理法」という。

第 2 講　PART2　確認問題

1　x，y は実数とする。次の命題を証明せよ。

「$x+y$ は無理数である」$\Longrightarrow$「x または y は無理数である」

（証明）

この命題の対偶は　「ア」$\Longrightarrow$「イ」……（＊）

ウ であるから，（＊）は成り立つ。

よって，エ である。

［ア，イ の選択肢］

① x または y は無理数である
② x と y はともに無理数である
③ x または y は有理数である
④ x と y はともに有理数である
⑤ $x+y$ は無理数である
⑥ $x+y$ は有理数である

［ウ の選択肢］

① 有理数と有理数の和は有理数
② 有理数と無理数の和は無理数
③ 有理数と無理数の和は有理数
④ 無理数と無理数の和は無理数

［エ の選択肢］

① もとの命題が真であるから，対偶も真
② もとの命題が真であるから，対偶は偽
③ 対偶が真であるから，もとの命題も真
④ 対偶が偽であるから，もとの命題は真

2 x，y は実数とする。背理法により，次の命題を証明せよ。

「x は有理数，y は無理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は無理数である」

（証明）

$x+y$ が無理数でない，すなわち，

「$x+y$ は [オ] である」

と仮定する。

p を [オ] として $x+y=p$ とすると　$y=p-x$　……(＊＊)

$p-x$ は [カ] であるから，(＊＊)は [キ] であることに矛盾する。

したがって，

「x は有理数，y は無理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は無理数である」

は成り立つ。

[[オ], [カ] の選択肢]

① 整数　　② 自然数

③ 有理数　　④ 無理数

[[キ] の選択肢]

① x が有理数　　② y が無理数

③ $x+y$ が無理数

【MEMO】

PART3　条件の否定と命題の否定，必要条件から考える

3　[1]　次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1)　すべての実数 x について，$x^2-1>0$

(2)　ある実数 x について，$x^2+2x+1<0$

[2]　実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ。

Point Pickup

[1]　命題「すべての x について p である」の否定は「ある x について $\overline{p}$ である」

命題「ある x について p である」の否定は「すべての x について $\overline{p}$ である」

「ある」の代わりに「適当な」「少なくとも 1 つの」，「すべての」の代わりに「任意の」「どのような」といった表現が使われることがある。

[2]　ある特定の x で成り立つための必要条件をいくつか求め，それらによって導かれた必要条件が，十分条件であることを示す。

第 2 講　PART3　確認問題

1　次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

「ある実数 x について，$x^2+3x+2=0$」

この命題の真偽は [ア]

命題の否定は [イ]

命題の否定の真偽は [ウ]

[[ア], [ウ]の選択肢]

①　真　　　②　偽

[[イ]の選択肢]

①「ある実数 x について，$x^2+3x+2\neq 0$」

②「すべての実数 x について，$x^2+3x+2=0$」

③「すべての実数 x について，$x^2+3x+2\neq 0$」

2 次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

「すべての実数 x について，$x^2-4x+4>0$」

この命題の真偽は [エ]

命題の否定は [オ]

命題の否定の真偽は [カ]

[[エ], [カ] の選択肢]

① 真　② 偽

[[オ] の選択肢]

① 「ある実数 x について，$x^2-4x+4>0$」

② 「ある実数 x について，$x^2-4x+4\leqq 0$」

③ 「すべての実数 x について，$x^2-4x+4\leqq 0$」

3 実数 x に関する等式 $a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ。

$a=$ [キ]，$b=$ [ク]，$c=$ [ケ]

[MEMO]

第 3 講　2 次関数とグラフ

PART1　1 次関数のグラフと最大値，最小値

1　[1]　関数 $y=ax+b\ (-1\leqq x\leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -1 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

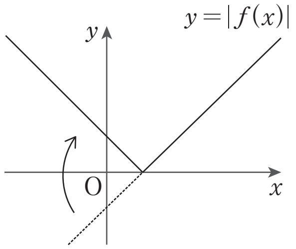
[2]　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=|x-1|$　　(2)　$y=|x+1|+|x-2|$

Point Pickup

[1]　関数 $y=ax+b$ が表すグラフは直線。a の符号で場合分けをする。
$a>0$ (右上がり), $a<0$ (右下がり)のいずれの場合も, 最大値, 最小値は端点でとる。

[2]　(1)　関数 $y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geqq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$ のグラフは，
$y=f(x)$ のグラフにおいて，x 軸より上側の部分をそのままに，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返すことで得られる。



(2)　絶対値を 2 つ以上含む場合は，場合分けにて絶対値をはずす。

第 3 講　PART1　確認問題

1　関数 $y=ax+b\ (-2\leqq x\leqq 1)$ の最大値が 4，最小値が -2 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

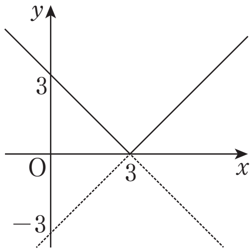
$a=\boxed{\text{ア}}$，$b=\boxed{\text{イ}}$　または　$a=\boxed{\text{ウエ}}$，$b=\boxed{\text{オ}}$

次の関数のグラフとして適切なものを選べ。

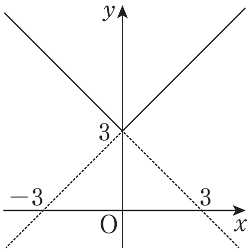
2　$y=|x-3|$

$\boxed{\text{カ}}$ の実線部分

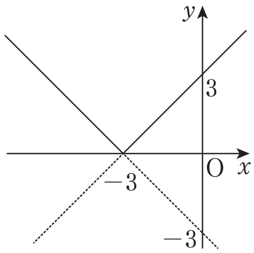
①



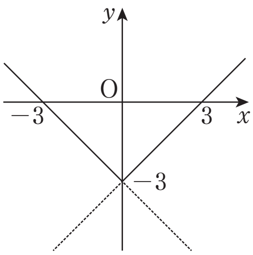
②



③



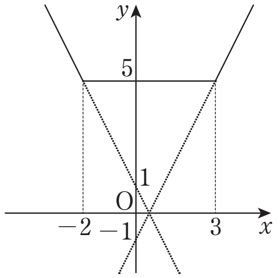
④



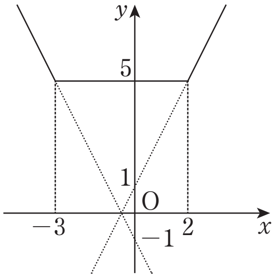
3 $y=|x+3|+|x-2|$

［キ］の実線部分

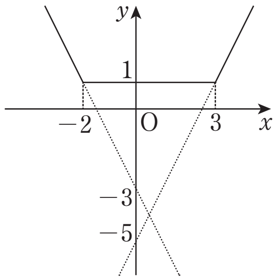
①



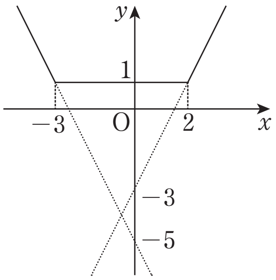
②



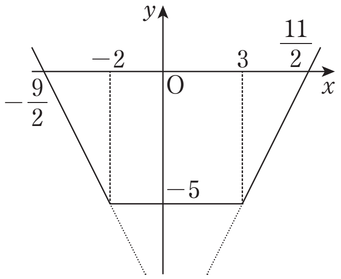
③



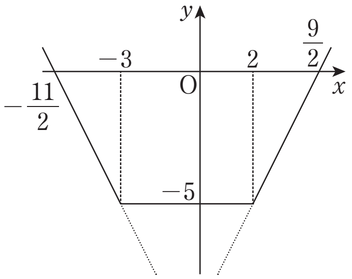
④



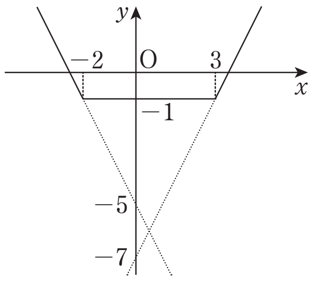
⑤



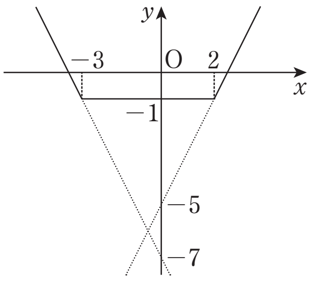
⑥



⑦



⑧



[MEMO]

PART2　放物線の平行移動・対称移動

2　［1］ (1)　放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を x 軸方向に1，y 軸方向に3だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(2)　ある放物線 C：$y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に1だけ平行移動すると放物線 $y=3x^2-6x+4$ に重なった。定数 a，b，c の値を求めよ。

［2］　放物線 $y=2x^2-2x+3$ を次の点や直線に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

Point Pickup

［1］　放物線の平行移動は，頂点の移動に注目する。平行移動しても x^2 の係数は変わらない。移動後の放物線の式が示されているときは，逆向きの平行移動によって移動前の放物線を求めるとよい。

［2］　放物線の対称移動は，頂点の移動と，凸方向の変化に注目する。

第3講　PART2　確認問題

1 放物線 $y=-2x^2-4x+1$ を x 軸方向に3，y 軸方向に3だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

$y=$ [アイ] x^2+ [ウ] $x-$ [エ]

2 ある放物線 $C：y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に3，y 軸方向に -6 だけ平行移動すると放物線 $y=-3x^2+6x-1$ に重なった。定数 a，b，c の値を求めよ。

$a=$ [オカ]，$b=$ [キクケ]，$c=$ [コサ]

3 放物線 $y=3x^2+12x+16$ を次の直線や点に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

x 軸：[シ]　　y 軸：[ス]　　原点：[セ]

① $y=3x^2-12x+16$　　② $y=3x^2-12x-16$

③ $y=-3x^2+12x+16$　　④ $y=-3x^2+12x-16$

⑤ $y=-3x^2-12x-16$

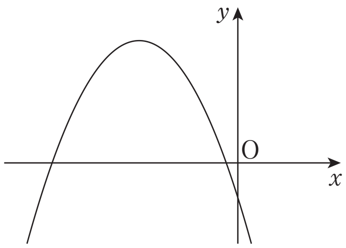
PART3　2次関数の係数の符号

3　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図のようになるとき，次の値の符号を調べよ。

(1)　a　　　(2)　b

(3)　c　　　(4)　b^2-4ac

(5)　$a+b+c$

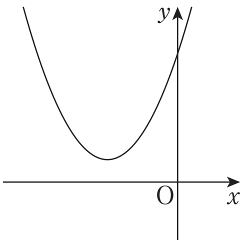


Point Pickup

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の係数 a，b，c や，それらで表された式の値の符号は，グラフの凸方向，頂点(軸)の位置，ある x の値を代入したときの y 座標の符号で考える。

第 3 講　PART3　確認問題

1　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図のようになるとき，次の値の符号を調べよ。



a [ア] 0

b [イ] 0

c [ウ] 0

b^2-4ac [エ] 0

$a+b+c$ [オ] 0

① ＞　② ＜

第 4 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2次関数の最大・最小

1　関数 $f(x)=x^2-4x-5$ $(a \leqq x \leqq a+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値 $m(a)$ を求めよ。　　(2)　最大値 $M(a)$ を求めよ。

Point Pickup

グラフが下に凸の放物線である 2 次関数 $y=f(x)$ の $\alpha \leqq x \leqq \beta$ における最大・最小について

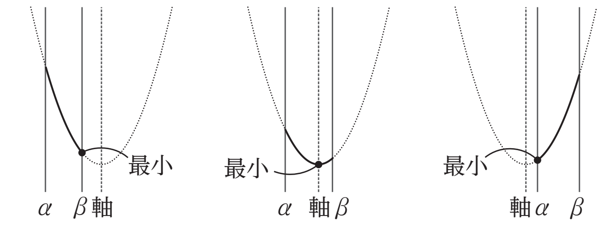
最小値は，グラフの軸が

・$\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内にあれば，

頂点の y 座標

・$\alpha \leqq x \leqq \beta$ 内になければ，

軸に近い方の端点の y 座標

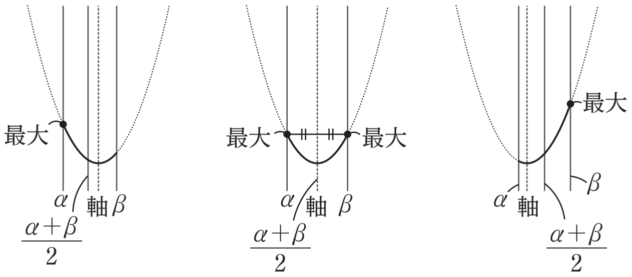


最大値は，

軸から遠い方の端点の y 座標

(軸が区間の中央 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より

左か右か)



第 4 講　PART1　確認問題

関数 $f(x)=x^2-2x+3$ $(a \leqq x \leqq a+1)$ について，次の問いに答えよ。

1　最小値 $m(a)$ を求めよ。

$a <$ [ア] のとき　$m(a)=$ [イ]

[ア] $\leqq a \leqq$ [ウ] のとき　$m(a)=$ [エ]

[ウ] $< a$ のとき　$m(a)=$ [オ]

[[イ], [エ], [オ] の選択肢]

①　$\dfrac{9}{4}$　　②　2　　③　3

④　a^2+2　　⑤　$a^2-a+\dfrac{5}{4}$

⑥　a^2-2a+3

2 最大値 $M(a)$ を求めよ。

$a < \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のとき　　$M(a) = \boxed{ク}$

$a = \dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ のとき　　$M(a) = \boxed{ケ}$

$\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}} < a$ のとき　　$M(a) = \boxed{コ}$

[$\boxed{ク}$ ～ $\boxed{コ}$ の選択肢]

① $\dfrac{9}{4}$　　② 2　　③ 3

④ a^2+2　　⑤ $a^2-a+\dfrac{5}{4}$

⑥ a^2-2a+3

【MEMO】

PART2　2変数関数の最大・最小，4次関数の最大・最小

2　[1]　$x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ。

(2)　$x \geqq 2$，$y \geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

[2]　関数 $y=x^4+4x^2+3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2=t$ とおき，y を t の式で表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

Point Pickup

[1]　$3x^2+2y^2$ のように，2つの変数によって値が定まる関数を「2変数関数」という。
条件式がある2変数関数の最大，最小は，条件式を用いて文字を消去するとよい。
消去する文字に条件がある場合は，残る文字の条件におき換える。

[2]　4次関数について，おき換えを行うことで，2次関数として扱うことができる場合がある。おき換えた文字の変域に注意。

第４講　PART2　確認問題

1　$3x+y=2$ のとき，$3x^2+y^2$ の最小値を求めよ。

$x=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$，$y=\dfrac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}$ のとき　最小値 $\boxed{オ}$

2　$3x+y=2$，$x\geqq 1$，$y\geqq -4$ のとき，$3x^2+y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

$x=\boxed{カ}$，$y=\boxed{キク}$ のとき　最大値 $\boxed{ケコ}$

$x=\boxed{サ}$，$y=\boxed{シス}$ のとき　最小値 $\boxed{セ}$

3　関数 $y=x^4+2x^2+2$ について，$x^2=t$ とおき，y を t の式で表せ。また，t のとりうる値の範囲を求めよ。さらに，y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

y を t の式で表すと　$y=\boxed{ソ}$

t のとりうる値の範囲は $\boxed{タ}$

y の最小値は　$x=\boxed{チ}$ のとき $\boxed{ツ}$

[$\boxed{ソ}$ の選択肢]

①　t^4+2t^2+2　　②　t^3+2t+2　　③　t^2+2t+2

[$\boxed{タ}$ の選択肢]

①　$t>0$　　②　$t\geqq 0$　　③　すべての実数

PART3　２次関数の決定

3　(1)　放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ。

(2)　定義域を $-2 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　放物線の頂点に関する条件が与えられたときは, $y=a(x-p)^2+q$ の形で考えるとよい。直線 $y=2x+1$ 上にある点は $(p,\ 2p+1)$ と表される。

(2)　2 次関数の最大・最小に関する条件が与えられたときは，グラフが上に凸か下に凸か，および頂点と端点の座標を考えるとよい。

第 4 講　PART3　確認問題

1　放物線 $y=2x^2-1$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 1)$ を通り，その頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ。

$$y=\boxed{ア}\left(x-\boxed{イ}\right)^2+\boxed{ウ}$$ または

$$y=\boxed{エ}\left(x-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\right)^2+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}$$

2　定義域を $1\leqq x\leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 12, 最小値が 4 であるとき, 定数 a, b の値を求めよ。

$$(a,\ b)=\left(\boxed{ケ},\ \boxed{コサ}\right),\ \left(\boxed{シス},\ \boxed{セ}\right)$$

第 5 講　2 次方程式

PART1　2次関数のグラフと x 軸の共有点

1　(1)　次の 2 次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(i)　$y=-x^2+2x+3$　　(ii)　$y=2x^2-4x+2$　　(iii)　$y=4(x-1)^2-5$

(2)　放物線 $y=3x^2-4x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(3)　x 軸と 2 点 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ で交わり，点 $(3, -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

Point Pickup

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。ax^2+bx+c が $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるならば，共有点の座標は $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ である。

第５講　PART1　確認問題

1　2 次関数 $y=-x^2+2x+8$ のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

$\left(\boxed{アイ},\ 0\right)$, $\left(\boxed{ウ},\ 0\right)$

2　2 次関数 $y=-3x^2-18x-27$ のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

$\left(\boxed{エオ},\ 0\right)$

3　2 次関数 $y=9(x-2)^2-2$ のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

$\left(\dfrac{\boxed{カ}+\sqrt{\boxed{キ}}}{\boxed{ク}},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{\boxed{ケ}-\sqrt{\boxed{コ}}}{\boxed{サ}},\ 0\right)$

4　放物線 $y=x^2-x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さ l を求めよ。

$l=\sqrt{\boxed{シ}}$

5　x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わり，点 $(2,\ 10)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

$y=\boxed{ス}x^2+\boxed{セ}x-\boxed{ソ}$

PART2　関数のグラフと x 軸の共有点

2　関数 $y=mx^2+2x+1$ …… ①について，次の問いに答えよ。

(1)　①のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(2)　①のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ。

Point Pickup

2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の異なる実数解の個数である。判別式 $D=b^2-4ac$ において

$D>0 \Longleftrightarrow$ 異なる 2 点で交わる

$D=0 \Longleftrightarrow$ (1 点で)接する

$D<0 \Longleftrightarrow$ 共有点をもたない

第 5 講　PART2　確認問題

関数 $y = mx^2 - 4x + 2$ ……(＊) について，次の問いに答えよ。

ただし，m は定数とする。

1 (＊)のグラフと x 軸の共有点の個数を求め，空欄に当てはまる最も適切なものを選べ。

[ア] のとき　2個

[イ] のとき　1個

[ウ] のとき　0個

①　$m < 0$　　②　$m < 2$

③　$m > 0$　　④　$m > 2$

⑤　$m < 0,\ 0 < m < 2$　　⑥　$0 < m < 2,\ 2 < m$

⑦　$m = 0$　　⑧　$m = 2$　　⑨　$m = 0,\ 2$

2 (＊)のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ。

([エ], [オ])

PART3　2次方程式の共通解

3　k を実数の定数とし，2 つの 2 次方程式 $x^2-x+k-4=0$，$x^2+3x-k=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつような k の値と，そのときの共通解を求めよ。

Point Pickup

2 つの 2 次方程式に共通解が存在するとき, その共通解を $x=\alpha$ とおき, 2 つの 2 次方程式にそれぞれ代入して，α と k の連立方程式として解く。

求めた値が問題の条件を満たすかの確認が必要。

第5講　PART3　確認問題

1 k を実数の定数とし，2つの2次方程式
$x^2-x+k=0$，$x^2-3x-k-6=0$ がただ1つの共通な実数解をもつような k の値と，そのときの共通解を求めよ。

$k=$ [アイ]，共通解 $x=$ [ウ]　または

$k=$ [エオ]，共通解 $x=$ [カキ]

第 6 講　２次不等式

PART1　２次不等式の解法とその解

1 (1) x についての２次不等式 $x^2-(1-a)x-a>0$ を解け。ただし，a は実数とする。

(2) ２次不等式 $ax^2+bx+12>0$ の解が $-2<x<3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

Point Pickup

(1) 文字係数の２次不等式の問題を，２次関数のグラフで考える。２次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標が，α，β であるとき，α，β の大小で場合分けを行う。

(2) ２次不等式の解から２次不等式の係数を決定する問題では，２次関数のグラフの凸方向を考えた上で，グラフと x 軸の共有点の x 座標 α，β を２次方程式の解として扱う。

第 6 講　PART1　確認問題

1　x についての 2 次不等式 $x^2-(a+2)x+2a \geqq 0$ を解け。

$a<$ [ア] のとき [イ]

$a=$ [ア] のとき [ウ]

$a>$ [ア] のとき [エ]

[[イ]~[エ] の選択肢]

① $a \leqq x \leqq 2$　　② $2 \leqq x \leqq a$

③ $x \leqq a,\ 2 \leqq x$　　④ $x \leqq 2,\ a \leqq x$

⑤ すべての実数

⑥ $x=2$ 以外のすべての実数

⑦ $x=2$　　⑧ 解なし

2　2 次不等式 $ax^2+bx-6<0$ の解が $-3<x<1$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

$a=$ [オ]，$b=$ [カ]

PART2　つねに成り立つ不等式

2　すべての実数 x に対して，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

すべての実数 x に対して，不等式 $f(x)>0$ が成り立つのは，$y=f(x)$ のグラフがつねに x 軸より上側にあるときである。とくに，$f(x)$ が２次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ のときは，$a>0$ かつ $f(x)=0$ の判別式 $D<0$ のときである。

第 6 講　PART2　確認問題

1　すべての実数 x に対して，不等式

$$(a^2-4)x^2-(a-2)x+2 \geqq 0$$

が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

ア

① $a<-2,\ 2<a$　② $a<-2,\ 2\leqq a$

③ $-2<a<2$　④ $-2<a\leqq 2$

⑤ $-\dfrac{18}{7}\leqq a<2$　⑥ $-\dfrac{18}{7}\leqq a\leqq 2$

⑦ $a\leqq -\dfrac{18}{7},\ 2<a$　⑧ $a\leqq -\dfrac{18}{7},\ 2\leqq a$

PART3　2次方程式の解の存在範囲

3　2 次方程式 $x^2-mx+3=0$ が 1 より大きい異なる 2 つの実数解をもつような定数 m の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

2 次方程式 $f(x)=0$ の実数解は, 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。よって, 2 次方程式 $f(x)=0$ の解の存在範囲は, 2 次関数 $y=f(x)$ のグラフを用いて考えることができる。考えるポイントは次の 3 点

(i)　判別式 D　　(ii)　軸の位置　　(iii)　区間の端点の y 座標の符号

第６講　PART3　確認問題

1　２次方程式 $x^2-2mx+9=0$ が -2 より小さい異なる２つの実数解をもつような定数 m の値の範囲を求めよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。

$f(x)=x^2-2mx+9$ とおくと，２次方程式 $f(x)=0$ が -2 より小さい異なる２つの実数解をもつのは，次の(i)〜(iii)が同時に成り立つときである。

(i)　２次方程式 $f(x)=0$ の判別式 D について　［ア］

(ii)　$y=f(x)$ のグラフの軸が　［イ］

(iii)　［ウ］

(i)〜(iii)より，求める定数 m の値の範囲は　［エ］

[［ア］の選択肢]

①　$D<0$　　②　$D=0$　　③　$D>0$

[［イ］の選択肢]

①　$x<2$ の範囲にある　　②　$x=2$ である
③　$x>2$ の範囲にある　　④　$x<-2$ の範囲にある
⑤　$x=-2$ である　　⑥　$x>-2$ の範囲にある

[［ウ］の選択肢]

①　$f(2)<0$　　②　$f(2)=0$　　③　$f(2)>0$
④　$f(-2)<0$　　⑤　$f(-2)=0$　　⑥　$f(-2)>0$

[［エ］の選択肢]

①　$m<-\dfrac{13}{4}$　　②　$m<-2$
③　$-\dfrac{13}{4}<m<-3$　　④　$-\dfrac{13}{4}<m<-2$
⑤　$-3<m<-2$　　⑥　$-3<m<3$
⑦　$-2<m<3$　　⑧　$m>3$

第7講　2次関数の様々な問題

PART1　ある範囲でつねに成り立つ不等式

1　2次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の条件が成り立つ定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$1\leqq x\leqq 3$ で，つねに $f(x)>0$ が成り立つ。

(2)　$1\leqq x\leqq 3$ で，つねに $f(x)<0$ が成り立つ。

Point Pickup

ある区間において，つねに $f(x)>0$ が成り立つ $\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最小値が正

ある区間において，つねに $f(x)<0$ が成り立つ $\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最大値が負

第 7 講　PART1　確認問題

2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+2$ について，次の条件が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。

1　$2\leqq x\leqq 4$ で，つねに $f(x)>0$ が成り立つ。

求める条件は $f(x)$ の $2\leqq x\leqq 4$ における [ア] が [イ] となることである。
次の(i)，(ii)に場合分けして考えると，$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の [ア] は，

(i)　$y=f(x)$ のグラフの軸が，[ウ]

(ii)　(i)以外のときの [エ]

(i)，(ii)より，求める定数 a の値の範囲は [オ]

[[ア] の選択肢]

①　最大値　　②　最小値

[[イ] の選択肢]

①　0 以上　　②　0 以下　　③　正　　④　負

[[ウ] の選択肢]

①　$2\leqq x\leqq 3$ の範囲にあるときの　$f(4)$

②　$3\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるときの　$f(2)$

③　$2\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるときの　$f(-a)$

[エ の選択肢]

① $f(2)$　② $f(4)$　③ $f(-a)$

④ $f(2)$ または $f(4)$　⑤ $f(2)$ または $f(-a)$

⑥ $f(4)$ または $f(-a)$

[オ の選択肢]

① $-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$　② $a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a$

③ $a<-\dfrac{9}{4}$　④ $a>-\dfrac{9}{4}$

⑤ $a<-\dfrac{3}{2}$　⑥ $a>-\dfrac{3}{2}$

2　$2 \leqq x \leqq 4$ で，つねに $f(x) < 0$ が成り立つ。

求める条件は $f(x)$ の $2 \leqq x \leqq 4$ における [カ] が [キ]

となることである。

$2 \leqq x \leqq 4$ における $f(x)$ の [カ] は，[ク] であるから，

求める定数 a の値の範囲は [ケ]

[[カ] の選択肢]

①　最大値　　②　最小値

[[キ] の選択肢]

①　0 以上　　②　0 以下　　③　正　　④　負

[[ク] の選択肢]

①　$f(2)$　　②　$f(4)$　　③　$f(-a)$

④　$f(2)$ または $f(4)$　　⑤　$f(2)$ または $f(-a)$

⑥　$f(4)$ または $f(-a)$

[[ケ] の選択肢]

①　$-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$　　②　$a < -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} < a$

③　$a < -\dfrac{9}{4}$　　④　$a > -\dfrac{9}{4}$

⑤　$a < -\dfrac{3}{2}$　　⑥　$a > -\dfrac{3}{2}$

PART2　絶対値を含む2次方程式の解の個数

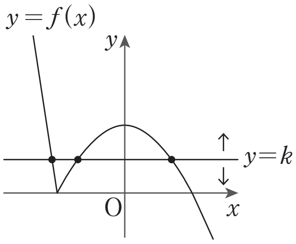
2 (1) x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

(2) x の方程式 $|x^2+2x-3|=-2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

Point Pickup

方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

よって，定数 k が入った x の方程式の実数解の個数は，定数 k だけを右辺に分離し，左辺の式が表すグラフを用いて調べるとよい。



第 7 講　PART2　確認問題

1　x の方程式 $|x^2-4x+3|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

[ア] のとき　4 個

[イ] のとき　3 個

[ウ] のとき　2 個

[エ] のとき　0 個

①　$k<0$　②　$k>0$

③　$k<1$　④　$k>1$

⑤　$0<k<1$

⑥　$k<0$，$k=1$

⑦　$k>1$，$k=0$

⑧　$k=0$　⑨　$k=1$

2 x の方程式 $|x^2-3x|=x-3+k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

[オ] のとき　4 個

[カ] のとき　3 個

[キ] のとき　2 個

[ク] のとき　1 個

[ケ] のとき　0 個

① $k<0$　② $0<k<3$

③ $3<k<4$　④ $k>4$

⑤ $3<k<4$，$4<k$

⑥ $0<k<3$，$3<k<4$

⑦ $0<k<3$，$4<k$

⑧ $k=0$　⑨ $k=3$

⑩ $k=3$，4

[MEMO]

PART3　2次方程式の解の存在範囲（少なくとも1つ）

3　2次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ が $-2<x<0$ に少なくとも1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

Point Pickup

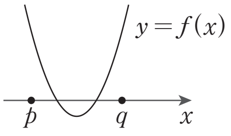
2次方程式 $f(x)=0$ が $p<x<q$ に少なくとも1つの実数解をもつときは以下

(i)　$p<x<q$ に2つの解(重解含む)をもつ

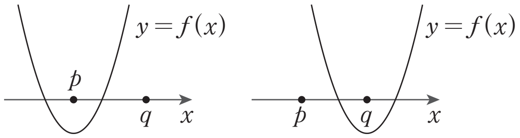
(ii)　$p<x<q$ に一方の解をもち，$x<p$ または $q<x$ にもう一方の解をもつ

(iii)　$p<x<q$ に一方の解をもち，もう一方の解が $x=p$ または $x=q$ である

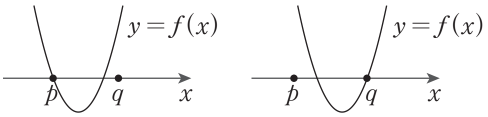
(i)



(ii)



(iii)



第 7 講　PART3　確認問題

1　2 次方程式 $x^2-2ax-2a+3=0$ が $0<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつような定数 a の値の範囲を求めよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。

$f(x)=x^2-2ax-2a+3$ とおくと，2 次方程式 $f(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつのは，次の(i)～(iv)の 4 つの場合が考えられる。

(i)　異なる 2 つの実数解または重解が $0<x<2$ の範囲にあるとき
このとき，次の[Ⅰ]～[Ⅲ]が同時に成り立つ。

[Ⅰ]　$f(x)=0$ の判別式 D について　ア

[Ⅱ]　$y=f(x)$ のグラフの軸は，イ の範囲にある。

[Ⅲ]　範囲の端点を考えると　ウ

(ii)　2 つの解のうち，一方が $0<x<2$ にあり，もう一方が $x<0$ または $2<x$ にあるとき
このとき，エ が成り立つ。

(iii)　解の 1 つが $x=0$ のとき
このとき，$a=$ オ で，$f(x)=0$ は $0<x<2$ に カ。

(iv)　解の 1 つが $x=2$ のとき
このとき，$a=$ キ で，$f(x)=0$ は $0<x<2$ に ク。

(i)～(iv)より，求める定数 a の値の範囲は　ケ

[ア の選択肢]

①　$D<0$　②　$D\leqq 0$　③　$D=0$

④　$D>0$　⑤　$D\geqq 0$

[イ の選択肢]

①　$x>0$　②　$x\geqq 0$　③　$x<2$　④　$x\leqq 2$

⑤　$0<x<2$　⑥　$0\leqq x\leqq 2$

[ウ , エ の選択肢]

①　$f(0)<0$ かつ $f(2)<0$

②　$f(0)<0$ または $f(2)<0$

③　$f(0)>0$ かつ $f(2)>0$

④　$f(0)>0$ または $f(2)>0$

⑤　$f(0)\cdot f(2)<0$　⑥　$f(0)\cdot f(2)>0$

⑦　$f(0)\cdot f(2)\leqq 0$　⑧　$f(0)\cdot f(2)\geqq 0$

[オ , キ の選択肢]

①　0　②　$\frac{1}{3}$　③　$\frac{7}{6}$

④　$\frac{3}{2}$　⑤　2　⑥　3

[カ , ク の選択肢]

①　解を１つもち，条件を満たす

②　解をもたず，不適

[ケ の選択肢]

①　$a\leqq -3,\ 1\leqq a$　②　$a\geqq \frac{7}{6}$

③　$1\leqq a<\frac{7}{6}$　④　$1\leqq a<\frac{3}{2}$

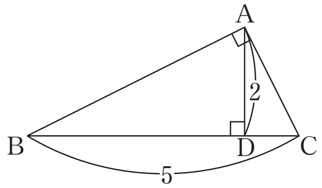
⑤　$\frac{7}{6}<a<\frac{3}{2}$　⑥　$\frac{7}{6}\leqq a<\frac{3}{2}$

[MEMO]

第 8 講　三角比

PART1　鋭角の三角比

1　[1]　右図のような直角三角形ABCにおいて，頂点Aから辺BCに下ろした垂線と辺BCとの交点をDとする。
$AB>AC$，$BC=5$，$AD=2$ とするとき，$\sin B$，$\cos B$ の値を求めよ。



[2]　$\angle ACB=90°$ の直角三角形ABCで，$\sin A=\dfrac{2}{3}$ のとき，次の三角比の値を求めよ。

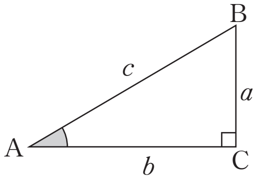
(1)　$\cos A$，$\tan A$　　　(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$

Point Pickup

[1]　右図の直角三角形ABCにおいて，∠Aの大きさを A とすると

$$\sin A=\frac{BC}{AB}=\frac{a}{c}\qquad \cos A=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$$

$$\tan A=\frac{BC}{AC}=\frac{a}{b}$$



[2]　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\qquad \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\qquad 1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

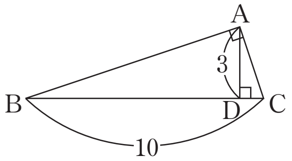
を利用する。なお，θ が鋭角の場合は，直角三角形の3辺の比を用いて三角比の値を求めることができる。

また，$90°-\theta$ の三角比について，以下の関係が成り立つ。

$$\sin(90°-\theta)=\cos\theta\qquad \cos(90°-\theta)=\sin\theta\qquad \tan(90°-\theta)=\frac{1}{\tan\theta}$$

第 8 講　PART1 確認問題

1 右図のような直角三角形ABCにおいて，頂点Aから辺BCに下ろした垂線と辺BCとの交点をDとする。



AB > AC，BC = 10，AD = 3 とするとき，$\sin B$，$\cos B$ の値を求めよ。

$\sin B =$ **ア**，$\cos B =$ **イ**

① $\dfrac{1}{2}$　② $\dfrac{1}{3}$　③ $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$　④ $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

⑤ $\dfrac{1}{\sqrt{10}}$　⑥ $\dfrac{3}{\sqrt{10}}$

2 $\angle \mathrm{ACB} = 90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて，$\sin A = \dfrac{1}{3}$ のとき，次の三角比の値を求めよ。

$\cos A =$ **ウ**，$\tan A =$ **エ**，

$\sin B =$ **オ**，$\cos B =$ **カ**，$\tan B =$ **キ**

① $\dfrac{1}{3}$　② 3　③ $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$　④ $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

⑤ $\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$　⑥ $2\sqrt{2}$

PART2　$a=c\sin A$，$b=c\cos A$，$a=b\tan A$

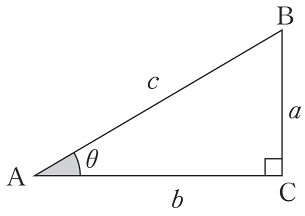
2　［1］　1 辺の長さが 8 である正五角形の対角線の長さを求めよ。ただし，必要ならば $\cos 36^\circ=0.8090$ を用いよ。

［2］　水平な地面のある地点 A から離れたところに地面に垂直に立つ塔がある。地点 A から測った塔の先端の仰角が 45°，地点 A から塔に向かって 30 m 近づいた地点 B から測った仰角が 60° であった。塔の高さを求めよ。ただし，目の高さは考えないものとする。

Point Pickup

右図の直角三角形において

$$a=c\sin\theta \qquad b=c\cos\theta \qquad a=b\tan\theta$$



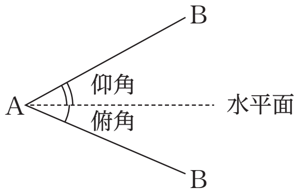
一般に，点 A から点 B を見るとき，

A を通る水平面と AB のなす角について

B が水平面より上にあるとき　→　仰角（ぎょうかく）

B が水平面より下にあるとき　→　俯角（ふかく）

という。



第 8 講　PART2 確認問題

1　1 辺の長さが 10 である正五角形の対角線の長さ l を求めよ。ただし，必要ならば $\cos 36^\circ = 0.8090$，$\cos 54^\circ = 0.5878$ を用いよ。

$l =$ [ア]

①　4.045　②　6.18　③　8.09
④　12.36　⑤　16.18

2　水平な地面において，地点 A から離れたところに木が植えられている。地点 A から測った木の先端の仰角が 30°，地点 A から木に向かって 16 m 近づいた地点 B から測った仰角が 45° であった。木の高さ h を求めよ。ただし，木は地面に垂直に立っており，目の高さは考えないものとする。

$h =$ [イ] (m)

①　$8\sqrt{3}$　②　$8\sqrt{3}+1$　③　$8\sqrt{3}+8$
④　$16\sqrt{3}$　⑤　$16\sqrt{3}+1$　⑥　$16\sqrt{3}+16$

PART3　鈍角の三角比

3　［1］　$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

（1）　$\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

（2）　$\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

［2］　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ。

（1）　$\sin\theta\cos\theta$　　（2）　$\sin^3\theta + \cos^3\theta$

（3）　$\sin\theta - \cos\theta$　　（4）　$\sin\theta$，$\cos\theta$

Point Pickup

［1］　三角比の値の符号は

θ が鋭角のとき　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta > 0$，$\tan\theta > 0$

θ が鈍角のとき　$\sin\theta > 0$，$\cos\theta < 0$，$\tan\theta < 0$

［2］　$\sin\theta + \cos\theta = k$ の形の等式は，両辺を 2 乗し，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ を利用することで，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めることができる。

第 8 講　PART3 確認問題

1　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。$\sin\theta = \dfrac{\sqrt{13}}{7}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値として，最も適当なものを選べ。

$(\cos\theta,\ \tan\theta) =$ [ア]

① $\left(\dfrac{4}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$

② $\left(-\dfrac{4}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$

③ $\left(\dfrac{4}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$, $\left(-\dfrac{4}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{4}\right)$

④ $\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$

⑤ $\left(-\dfrac{6}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$

⑥ $\left(\dfrac{6}{7},\ \dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$, $\left(-\dfrac{6}{7},\ -\dfrac{\sqrt{13}}{6}\right)$

2 $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。$\tan\theta = \dfrac{5}{12}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値として，最も適当なものを選べ。

$(\sin\theta,\ \cos\theta) =$ [イ]

① $\left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{13}\right)$

② $\left(-\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$

③ $\left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{13}\right),\ \left(-\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$

④ $\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{5}{13}\right)$

⑤ $\left(-\dfrac{12}{13},\ -\dfrac{5}{13}\right)$

⑥ $\left(\dfrac{12}{13},\ \dfrac{5}{13}\right),\ \left(-\dfrac{12}{13},\ -\dfrac{5}{13}\right)$

$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{3}\ (0^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，次の値を求めよ。

3 $\sin\theta\cos\theta = \dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}$，$\sin^3\theta + \cos^3\theta = \dfrac{\boxed{カキ}}{\boxed{クケ}}$

4 $\sin\theta - \cos\theta = \dfrac{\sqrt{\boxed{コサ}}}{\boxed{シ}}$，

$\sin\theta = \dfrac{\boxed{ス} + \sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$，$\cos\theta = \dfrac{\boxed{ス} - \sqrt{\boxed{セソ}}}{\boxed{タ}}$

[MEMO]

第 9 講　正弦定理，余弦定理，三角形の面積

PART1　三角形の形状

1　△ABC において，BC$=a$，CA$=b$，AB$=c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin A : \sin B : \sin C = 3 : 5 : 7$ のとき，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ。

$$(a - c\cos B)\sin B = (b - c\cos A)\sin A$$

Point Pickup

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C} = 2R$ より $a = 2R\sin A$，$b = 2R\sin B$，$c = 2R\sin C$

よって　$a : b : c = 2R\sin A : 2R\sin B : 2R\sin C = \sin A : \sin B : \sin C$

△ABC において　$a > b > c \iff A > B > C$
（a が最大辺 $\iff$ A が最大角）

(2)　正弦定理　$\dfrac{a}{\sin A} = 2R \iff \sin A = \dfrac{a}{2R}$

余弦定理　$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \iff \cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

などを用いて，角を消去し，辺だけの関係式を導くことで，三角形の形状を調べる。

第 9 講　PART1 確認問題

1　△ABC において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする。

$\sin A : \sin B : \sin C = 1 : \sqrt{5} : \sqrt{2}$ のとき，△ABC の内角のうち，最も大きい角の大きさを求めよ。

最も大きい角は [ア] で，その大きさは [イ]

[[ア] の選択肢]

① A　② B　③ C

[[イ] の選択肢]

① 30°　② 45°　③ 60°　④ 90°
⑤ 120°　⑥ 135°　⑦ 150°

2　△ABC において，$BC=a$，$CA=b$，$AB=c$ とする。

次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ。

$$a^2\cos A\sin B = b^2\cos B\sin A$$

△ABC は，[ウ] または [エ]

ただし，当てはまる選択肢番号については，小さい方の番号を [ウ] とせよ。

① ∠A＝90° の直角三角形
② ∠B＝90° の直角三角形
③ ∠C＝90° の直角三角形
④ BC＝AC の二等辺三角形
⑤ AC＝AB の二等辺三角形
⑥ AB＝BC の二等辺三角形

PART2　三角形の決定

2　△ABC において，$b=1+\sqrt{3}$，$c=2$，$C=45^\circ$ のとき，a，A，B を求めよ。

Point Pickup

三角形の辺の長さ a，b，c，角の大きさ A，B，C のうち，3 つが与えられ，残りの辺の長さや角の大きさを求め三角形を決定する問題において，2 辺の長さとその 2 辺の間ではない角が与えられたとき，三角形が 1 つに定まらないことがある。

第9講　PART2 確認問題

1　△ABC において，$b=2$，$c=\sqrt{2}$，$C=30^\circ$ のとき，a，A，B を求めよ。

$a=$ ア，$A=$ イ，$B=$ ウ　または

$a=$ エ，$A=$ オ，$B=$ カ

ただし，ア $>$ エ とする。

[ア，エ の選択肢]

① 1　② 2　③ $\sqrt{2}$　④ $2\sqrt{2}$

⑤ $\sqrt{3}$　⑥ $\sqrt{3}-1$　⑦ $\sqrt{3}+1$

[イ，ウ，オ，カ の選択肢]

① 15°　② 30°　③ 45°　④ 60°

⑤ 75°　⑥ 90°　⑦ 105°　⑧ 120°

⑨ 135°　⑩ 150°

PART3　三角形の面積

3　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ。

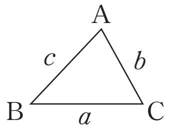
(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(3)　△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

Point Pickup

△ABC の面積を S，内接円の半径を r，外接円の半径を R とすると



$$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$　ただし，$2s=a+b+c$　（ヘロンの公式）

$$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$S=\frac{abc}{4R}$$

第 9 講　PART3 確認問題

1　△ABC において，AB $=10$，BC $=3\sqrt{5}$，CA $=5$ のとき，△ABC の面積 S，内接円の半径 r，外接円の半径 R を求めよ。

$$S=\boxed{\text{アイ}},\quad r=\frac{\boxed{\text{ウ}}-\sqrt{\boxed{\text{エ}}}}{\boxed{\text{オ}}},$$

$$R=\frac{\boxed{\text{カ}}\sqrt{\boxed{\text{キ}}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

第10講　図形の計量

PART1　角の二等分線の長さ

1 (1) △ABC において，AB＝5，AC＝4，∠A＝60° とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2) △ABC において，AB＝6，BC＝5，CA＝4 とする。∠C の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

Point Pickup

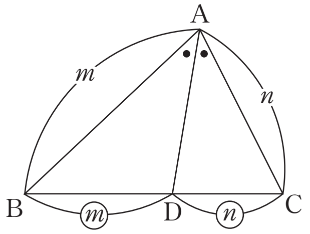
(1) 二等分する前の角，二等分したあとの角がともに有名角の場合，角の二等分線の長さは，三角形の面積を利用して求めるとよい。

(2) 必要な線分の長さを，角の二等分線の性質

△ABC において，線分 AD が ∠A の二等分線のとき

BD：DC＝AB：AC

を利用して求める。



また，角の二等分線の長さを，余弦定理を用いて求めるために必要な角の余弦の値は，二等分する前の三角形で余弦定理を用いて求める。

第10講　PART1 確認問題

1 △ABC において，AB = 3，AC = 2，∠A = 60° とする。
∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

$$\mathrm{AD} = \frac{\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

2 △ABC において，AB = 7，BC = 8，CA = 6 とする。
∠C の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

$$\mathrm{CD} = \boxed{\text{エ}}$$

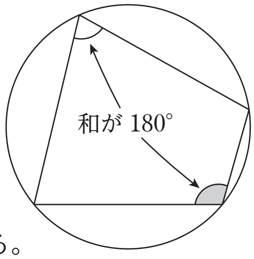
PART2　円に内接する四角形の面積

2　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している。

(1)　対角線 AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

Point Pickup



円に内接する四角形の対角の和は 180° であることを利用して解く。
対角線によって分けられた 2 つの三角形に余弦定理を適用するため，
対角線の長さをそれぞれ式で表し，

$$\cos(180^\circ-\theta)=-\cos\theta$$

を用いて，対角線の長さと対角の余弦の値に関する連立方程式をつくる。
これを解くことで，対角線の長さおよび対角の余弦の値を求めることができる。
四角形の面積は，対角線によって分けられた 2 つの三角形の面積の和として求める。
その際に $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ を用いるとよい。

第10講　PART2 確認問題

1　AB = 2，BC = 3，CD = 6，DA = 5である四角形 ABCD が円に内接している。このとき, 対角線 AC の長さ, および四角形 ABCD の面積 S を求めよ。

AC = $\sqrt{\boxed{\text{アイ}}}$

S = $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$

PART3　3 辺の長さが等しい四面体の高さと体積

3　$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=4,\ \mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=6$ である四面体PABCの体積 V を求めよ。

Point Pickup

図形の対称性を利用し，ある頂点から対面に下ろした垂線の長さを高さとして求める。

第10講　PART3 確認問題

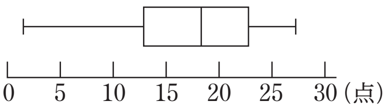
1　$PA=PB=PC=\sqrt{7}$，$AB=BC=CA=2\sqrt{3}$ である四面体PABCについて，△ABC を底面としたときの高さ h と体積 V を求めよ。

$h=\sqrt{\boxed{ア}}$

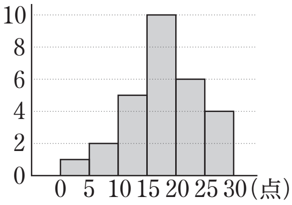
$V=\boxed{イ}$

第 11 講　データの分析
PART1　箱ひげ図

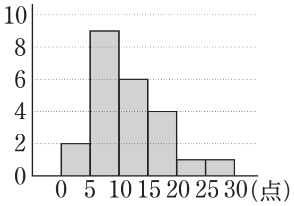
1　(1)　右の箱ひげ図を表すデータを使ってかいたヒストグラムとして，正しいものを次からすべて選べ。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。



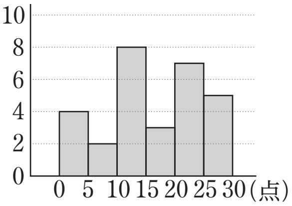
①



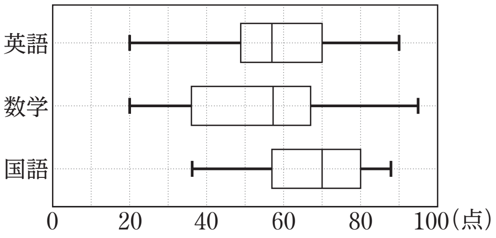
②



③



(2)　右図は，ある学校の 1 年生 50 人に行った英語，数学，国語のテストの得点を表したものである。この図から読みとれることとして，正しいものを次からすべて選べ。



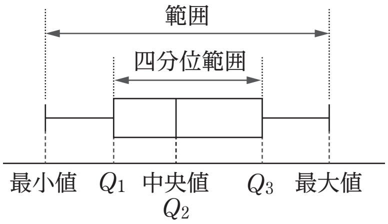
① 散らばりの度合いが最も大きいのは数学である。

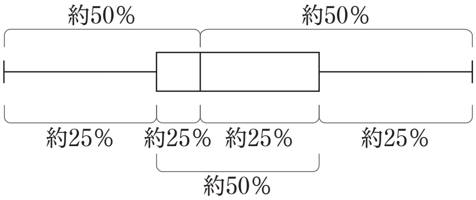
② 60 点以上の生徒は, 英語では 25 人以下であるが, 国語では 25 人以上である。

③ 80 点以上の生徒は，国語より数学の方が多い。

Point Pickup

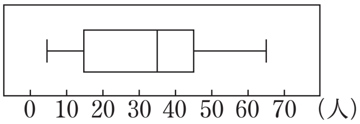
箱ひげ図から，データの最大値，最小値，四分位数といった値を読み取ることができ，そこから範囲, 四分位範囲といったデータの散らばりの度合いや，データの個数の分布がわかる。

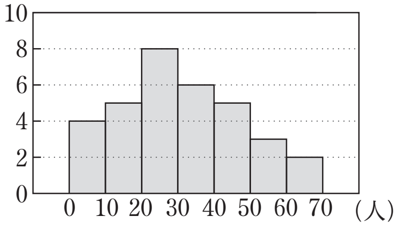




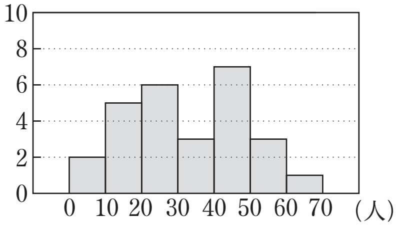
第11講　PART1 確認問題

1　下の図(A)，(B)，(C)のうち，右の箱ひげ図を表すデータを使ってかいたヒストグラムとして，正しいものには①，正しくないものには②をそれぞれ当てはめよ。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

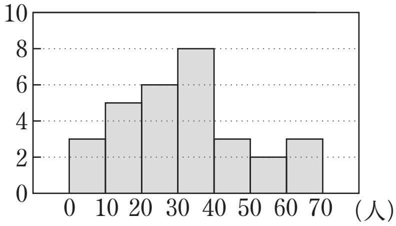


(A)


ア

(B)


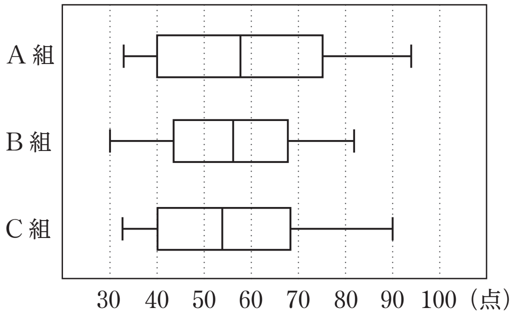
イ

(C)


ウ

①　正　　　②　誤

2 A 組，B 組，C 組の各組 38 人の生徒に対して数学のテストを行った。下図は，組ごとにテストの得点を箱ひげ図に表したものである。



この箱ひげ図に関する次の(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)の記述について，正しいものには①，正しくはないものには②をそれぞれ当てはめよ。

(Ⅰ)　散らばりの度合いが最も小さいのは B 組である。

エ

(Ⅱ)　60 点以下の生徒は，A 組では 19 人以上であるが，B 組では 18 人未満である。 **オ**

(Ⅲ)　40 点以下の生徒は，C 組より B 組の方が少ない。

カ

①　正　　　②　誤

[MEMO]

PART2　変量の変換

2　a，b を定数とする。変量 u と，u に対し $x=au+b$ によって定義される変量 x について，u，x の平均値をそれぞれ $\overline{u}$，$\overline{x}$，分散をそれぞれ ${s_u}^2$，${s_x}^2$ とすると

$$\overline{x}=a\overline{u}+b,\quad {s_x}^2=a^2{s_u}^2$$

が成り立つ。これを利用して，次の変量 x のデータの平均値，分散を，$u=\dfrac{x-520}{6}$ とおくことによって求めよ。

526，484，532，538，550，502

Point Pickup

変量 x の平均値や分散，標準偏差の計算を簡略化するために，$u=\dfrac{x-b}{a}$ $(x=au+b)$ とおき，変量 u の平均値や分散，標準偏差を求め，その値をもとに

平均値 $\overline{x}=a\overline{u}+b$　　分散 ${s_x}^2=a^2{s_u}^2$　　標準偏差 $s_x=|a|s_u$

を用いることで，変量 x の平均値や分散，標準偏差を求めることができる。

u の分散 ${s_u}^2$ の計算には，必要に応じて

$${s_u}^2=\overline{u^2}-(\overline{u})^2\quad (2\text{ 乗の平均}-\text{平均の }2\text{ 乗})$$

を用いるとよい。

第11講　PART2 確認問題

1　a, b を定数とする。変量 u と，u に対し $x=au+b$ によって定義される変量 x について，u，x の平均値をそれぞれ $\overline{u}$，$\overline{x}$，分散をそれぞれ $s_u{}^2$，$s_x{}^2$ とすると

$$\overline{x}=a\overline{u}+b,\quad s_x{}^2=a^2s_u{}^2$$

が成り立つ。

これを利用して，次の変量 x のデータの平均値 $\overline{x}$，分散 $s_x{}^2$ を，$u=\dfrac{x-750}{8}$ とおくことによって求めよ。

798，750，774，782，726

$\overline{u}=$ ［ア］，$\overline{x}=$ ［イウエ］，

$s_u{}^2=$ ［オカ］，$s_x{}^2=$ ［キクケ］

PART3　データの修正による変化

3　右の表のような 2 つの変量 x，y のデータがあり，x，y の平均値はそれぞれ 25，14 である。

データの番号	①	②	③	④	⑤
x	25	21	23	29	27
y	17	8	11	20	14

(1)　データに誤りがあり，番号①の x の値が正しくは 20 であった。このデータを修正すると，x の平均値はいくら減少するか。

(2)　次の(i)，(ii)のそれぞれについて，［　　］に当てはまるものを，下のア，イ，ウから選べ。

(i)　データに誤りがあり，番号③の y の値が正しくは 13，番号④の y の値が正しくは 18 であった。このデータを修正するとき，y の分散は修正前と比べて［　　］。

(ii)　x の値が 25，y の値が 14 であるデータを追加すると，x と y の相関係数は追加前と比べて［　　］。

ア　増加する　　　イ　減少する　　　ウ　変化しない

Point Pickup

変量 x の分散　$s_x{}^2=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$　……　(偏差)^2 の平均値

2 つの変量 x と y の

共分散　$s_{xy}=\dfrac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$

……　偏差の積の平均値

相関係数　$r=\dfrac{s_{xy}}{s_x s_y}$　……　$\dfrac{(x\text{ と }y\text{ の共分散})}{(x\text{ の標準偏差})\times(y\text{ の標準偏差})}$

データの修正や追加(削除)によって，変化がある部分とない部分を区別して考える。

第11講　PART3 確認問題

右の表のような2つの変量 x，y のデータがあり，x，y の平均値はそれぞれ60，45である。

番号	1	2	3	4	5	6
x	58	65	62	50	61	64
y	50	45	51	41	44	39

1　番号4の x の値が62であるとすると，x の平均値はいくら増加するか。

修正前より，［ア］増加する。

2　次の(i), (ii)それぞれについて，空欄に当てはまるものを選べ。

(i)　データに誤りがあり，番号1の y の値が正しくは53，番号5の y の値が正しくは41であった。このデータを修正すると，y の分散は修正前と比べて［イ］。

(ii)　このデータに，x の値が60，y の値が45であるデータを1つ追加すると，x と y の相関係数は追加前と比べて［ウ］。

①　増加する　　②　減少する　　③　変化しない

[MEMO]

[MEMO]

[MEMO]

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト　解答

第 1 講　数と式

PART1　因数分解

1　次の式を因数分解せよ。

(1)　$xy-yz+x^2-zx$

(2)　$x^2-4xy+3y^2+x-5y-2$

(3)　$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

(4)　x^4+5x^2+9

(1)
$$\begin{aligned} xy-yz+x^2-zx &= (x-z)y+x^2-xz \\ &= (x-z)y+x(x-z) \\ &= (x-z)(y+x) \\ &= (x+y)(x-z) \end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned} x^2-4xy+3y^2+x-5y-2 &= x^2+(-4y+1)x+3y^2-5y-2 \\ &= x^2+(-4y+1)x+(3y+1)(y-2) \\ &= \{x-(3y+1)\}\{x-(y-2)\} \\ &= (x-3y-1)(x-y+2) \end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned} a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) &= (-b+c)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c \\ &= -(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a-bc(b-c) \\ &= -(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\} \\ &= -(b-c)(a-b)(a-c) \\ &= (a-b)(b-c)(c-a) \end{aligned}$$

(4)
$$\begin{aligned} x^4+5x^2+9 &= (x^4+6x^2+9)-x^2 \\ &= (x^2+3)^2-x^2 \\ &= \{(x^2+3)+x\}\{(x^2+3)-x\} \\ &= (x^2+x+3)(x^2-x+3) \end{aligned}$$

PART2　式の値

2　［1］ $\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ を２重根号をはずして簡単にせよ。また，$\sqrt{27-10\sqrt{2}}$ の整数部分を a，小数部分を b とするとき，b を２重根号を用いずに表せ。

［2］ $x+\dfrac{1}{x}=\sqrt{7}$ のとき，次の式の値を求めよ。ただし，$x>1$ とする。

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}$　　(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}$　　(4) $x-\dfrac{1}{x}$

［1］ $\sqrt{27-10\sqrt{2}}=\sqrt{27-2\sqrt{50}}=\sqrt{(25+2)-2\sqrt{25\cdot 2}}=\sqrt{(\sqrt{25}-\sqrt{2})^2}$

$=\sqrt{25}-\sqrt{2}=5-\sqrt{2}$

$1<\sqrt{2}<2$ より，$-2<-\sqrt{2}<-1$　よって　$3<5-\sqrt{2}<4$ であるから，$a=3$

したがって，$b=(5-\sqrt{2})-a=(5-\sqrt{2})-3=2-\sqrt{2}$

［2］ (1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}=(\sqrt{7})^2-2=5$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=(\sqrt{7})^3-3\cdot\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

（別解）

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=\sqrt{7}\cdot 5-\sqrt{7}=4\sqrt{7}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}=5^2-2=23$

(4) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2=5-2=3$

$x>1$ より $0<\dfrac{1}{x}<1$　よって　$x-\dfrac{1}{x}>0$　したがって　$x-\dfrac{1}{x}=\sqrt{3}$

PART3　1 次不等式

3　[1]　$-1<a<3$，$2<b<5$ のとき，次の式のとりうる値の範囲を求めよ。

(1)　$\dfrac{3a-5}{2}$　　(2)　$a+b$　　(3)　$2a-3b$

[2]　不等式 $4x-3a<-1$ を満たす整数 x の最大値が 5 であるとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

[3]　次の x についての方程式，不等式を解け。

(1)　$||x-4|-3|=5$

(2)　$|x+1|+|x-3|<4x$

(3)　$ax<x+b$

[1]　(1)　$-1<a<3$ より $-3<3a<9$　　$-8<3a-5<4$　　よって $-4<\dfrac{3a-5}{2}<2$

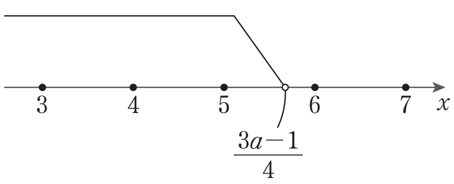
(2)　$-1<a<3$，$2<b<5$ の各辺を加えて　$1<a+b<8$

(3)　$-1<a<3$ より　$-2<2a<6$ …… ①

$2<b<5$ より　$-15<-3b<-6$ …… ②

①と②の各辺を加えて　$-17<2a-3b<0$

[2]　$4x-3a<-1$ より $4x<3a-1$　　$x<\dfrac{3a-1}{4}$



これを満たす整数 x の最大値が 5 であることから

$$5<\frac{3a-1}{4}\leqq 6$$

$$20<3a-1\leqq 24$$

$$21<3a\leqq 25$$

よって

$$7<a\leqq\frac{25}{3}$$

［3］ (1) $||x-4|-3|=5$ より $|x-4|-3=\pm 5$

よって　$|x-4|=8,\ -2$

$|x-4|\geqq 0$　より　$|x-4|=8$

$x-4=\pm 8$　　よって　$x=12,\ -4$

以上より，求める解は $x=12,\ -4$

(2) (i)　$x<-1$ のとき

$-(x+1)-(x-3)<4x$　　$-x-1-x+3<4x$　　$-6x<-2$　　$x>\dfrac{1}{3}$

$x<-1$ を満たさず不適。

(ii)　$-1\leqq x<3$ のとき

$(x+1)-(x-3)<4x$　　$x+1-x+3<4x$　　$-4x<-4$　　$x>1$

$-1\leqq x<3$ との共通範囲は　$1<x<3$

(iii)　$x\geqq 3$ のとき

$(x+1)+(x-3)<4x$　　$x+1+x-3<4x$　　$-2x<2$　　$x>-1$

$x\geqq 3$ との共通範囲は　$x\geqq 3$

(i)～(iii)より，求める解は　$x>1$

(3) $ax<x+b$ より $(a-1)x<b$

(i)　$a>1$ のとき　$x<\dfrac{b}{a-1}$

(ii)　$a=1$ のとき　$0\cdot x<b$

$b>0$ のとき　解はすべての実数

$b\leqq 0$ のとき　解なし

(iii)　$a<1$ のとき　$x>\dfrac{b}{a-1}$

(i)～(iii)より　$a>1$ のとき　$x<\dfrac{b}{a-1}$

$a=1$ かつ $b>0$ のとき　解はすべての実数

$a=1$ かつ $b\leqq 0$ のとき　解なし

$a<1$ のとき　$x>\dfrac{b}{a-1}$

第 2 講　命題と証明

PART1　命題と条件

1　次の [　　] に最も適するものを下の選択肢①～④から 1 つ選べ。ただし，使われている文字はすべて実数とする。

(1)　$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための [　　]。

(2)　$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための [　　]。

(3)　$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための [　　]。

(4)　$-2 \leqq x \leqq 2$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための [　　]。

(5)　$x+y$，xy がともに有理数であることは，x，y がともに有理数であるための [　　]。

①　必要十分条件である

②　必要条件であるが十分条件ではない

③　十分条件であるが必要条件ではない

④　必要条件でも十分条件でもない

(1)　$x<2 \Longrightarrow x \leqq 2$ は明らかに真

$x \leqq 2 \Longrightarrow x<2$ は偽(反例：$x=2$)

したがって，$x<2$ は $x \leqq 2$ であるための十分条件であるが必要条件でない。(③)

(2)　$a^2>b^2 \Longrightarrow a>b$ は偽(反例：$a=-2$，$b=1$)

$a>b \Longrightarrow a^2>b^2$ は偽(反例：$a=1$，$b=-2$)

したがって，$a^2>b^2$ は $a>b$ であるための必要条件でも十分条件でもない。(④)

(3)　a が実数のとき，$a^2 \geqq 0$(等号成立は $a=0$ のとき)であるから，

$a^2+b^2=0$ となるのは $a=b=0$ のときのみである。

よって　$a=b=0 \Longleftrightarrow a^2+b^2=0$

したがって，$a=b=0$ は $a^2+b^2=0$ であるための必要十分条件である。(①)

(4) $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ のとき $-\dfrac{3}{2}<x+\dfrac{1}{2}<\dfrac{3}{2}$　　つまり $-2<x<1$

$-2 \leqq x \leqq 2 \Longrightarrow \left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ は偽(反例：$x=-2$)

$\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2} \Longrightarrow -2 \leqq x \leqq 2$ は真

したがって，$-2 \leqq x \leqq 2$ は $\left|x+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{3}{2}$ であるための必要条件であるが十分条件ではない。

(②)

(5) $x+y$，xy がともに有理数 $\Longrightarrow x$，y がともに有理数は偽(反例：$x=3-\sqrt{2}$，$y=3+\sqrt{2}$)

x，y がともに有理数 $\Longrightarrow x+y$，xy がともに有理数は明らかに真

したがって，$x+y$，xy がともに有理数であることは，x，y がともに有理数であるための必要条件であるが十分条件ではない。(②)

PART2　命題と証明

2 (1)　整数 n について，n^2 が 3 の倍数ならば，n は 3 の倍数であることを証明せよ。
(2)　$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。ただし，(1)の結果を用いてもよいものとする。

(1)　与えられた命題の対偶は

「整数 n について，n が 3 の倍数でないならば，n^2 は 3 の倍数ではない」

である。

n が 3 の倍数でないとき，k を整数として

$n=3k+1$　または　$n=3k+2$

とおける。

$n=3k+1$ のとき

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$

$n=3k+2$ のとき

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

$3k^2+2k$，$3k^2+4k+1$ は整数であるから，$n=3k+1$，$n=3k+2$ いずれの場合も n^2 は 3 の倍数ではない。

よって，対偶が真であるから，もとの命題も真である。

(2)　$\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であると仮定すると

$\sqrt{3}=\dfrac{n}{m}$ (m，n は 1 以外に公約数をもたない自然数)

とおける。このとき，$\sqrt{3}\,m=n$ より $3m^2=n^2$　…… ①

$3m^2$ は 3 の倍数であるから，n^2 も 3 の倍数である。

よって，(1)の結果から，n は 3 の倍数であるから，$n=3k$ (k：自然数) とおける。

このとき①より　$3m^2=(3k)^2$ であるから　$m^2=3k^2$

$3k^2$ は 3 の倍数であるから，m^2 は 3 の倍数であり，m は 3 の倍数である。

ゆえに，m と n は公約数 3 をもち，1 以外に公約数をもたないことに矛盾する。

したがって，$\sqrt{3}$ は無理数である。

PART3　条件の否定と命題の否定，必要条件から考える

3　[1]　次の命題とその否定の真偽をそれぞれ調べよ。

(1)　すべての実数 x について，$x^2-1>0$

(2)　ある実数 x について，$x^2+2x+1<0$

[2]　実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための必要十分条件を求めよ。

[1]　(1)　命題「すべての実数 x について，$x^2-1>0$」について

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x^2-1=\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{3}{4}<0$ より，$x^2-1>0$ は成立しない。

よって，命題は偽

命題の否定「ある実数 x について，$x^2-1\leqq 0$」について

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$x^2-1=-\dfrac{3}{4}\leqq 0$ であるから命題の否定は真

(2)　命題「ある実数 x について，$x^2+2x+1<0$」について

$x^2+2x+1=(x+1)^2\geqq 0$ であるから，$x^2+2x+1<0$ となる実数 x は存在しない。

よって，命題は偽

命題の否定「すべての実数 x について，$x^2+2x+1\geqq 0$」について

$x^2+2x+1=(x+1)^2\geqq 0$ であるから命題の否定は真

[2]　$ax^2+bx+c=0$ が

$x=0$ について成り立つならば　$c=0$ …… ①

$x=1$ について成り立つならば　$a+b+c=0$ …… ②

$x=-1$ について成り立つならば　$a-b+c=0$ …… ③

①～③より　$a=b=c=0$

これは，実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための必要条件である。

$a=b=c=0$ ならば　$ax^2+bx+c=0\cdot x^2+0\cdot x+0=0$

よって，どのような x の値に対しても $ax^2+bx+c=0$ が成り立つ。

ゆえに，$a=b=c=0$ は，実数 x に関する等式 $ax^2+bx+c=0$ がどのような x の値に対しても成り立つための十分条件である。

以上より，$a=b=c=0$ が求める必要十分条件である。

第 3 講　2 次関数とグラフ

PART1　1 次関数のグラフと最大値，最小値

1　［1］ 関数 $y=ax+b\ (-1 \leqq x \leqq 2)$ の最大値が 5，最小値が -1 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

［2］ 次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=|x-1|$　　(2)　$y=|x+1|+|x-2|$

［1］ $x=-1$ のとき　$y=-a+b$

$x=2$ のとき　$y=2a+b$

(i)　$a>0$ のとき

グラフは右上がりの直線となり

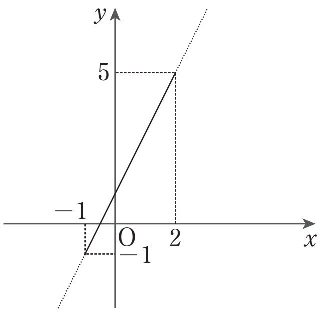
$x=-1$ のとき最小値 -1

$x=2$ のとき最大値 5

をとるから

$-a+b=-1$，$2a+b=5$

よって　$a=2$，$b=1$　　これは $a>0$ を満たす。



(ii)　$a<0$ のとき

グラフは右下がりの直線となり

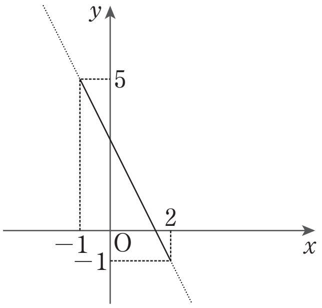
$x=-1$ のとき最大値 5

$x=2$ のとき最小値 -1

をとるから

$-a+b=5$，$2a+b=-1$

よって　$a=-2$，$b=3$　　これは $a<0$ を満たす。



(iii)　$a=0$ のとき

関数は $y=b$ となり，x の値に関わらず一定の値をとる。

よって，最大値と最小値は一致し，不適。

(i)～(iii)より　$a=2$，$b=1$　または　$a=-2$，$b=3$

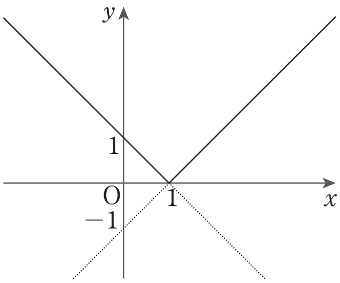
［2］ ⑴ $x-1 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 1$ のとき

$$y=x-1$$

$x-1<0$ すなわち $x<1$ のとき

$$y=-(x-1)=-x+1$$

よって，グラフは右図実線部分。



⑵ $x<-1$ のとき

$$y=-(x+1)-(x-2)=-2x+1$$

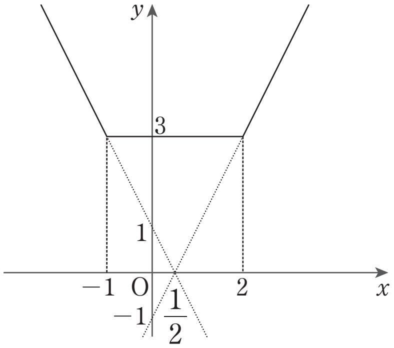
$-1 \leqq x<2$ のとき

$$y=(x+1)-(x-2)=3$$

$2 \leqq x$ のとき

$$y=(x+1)+(x-2)=2x-1$$

よって，グラフは右図実線部分。



PART2　放物線の平行移動・対称移動

2　[1]　(1)　放物線 $y=-2x^2+3x-4$ を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動した放物線の方程式を求めよ。

(2)　ある放物線 C：$y=ax^2+bx+c$ を x 軸方向に -2，y 軸方向に 1 だけ平行移動すると放物線 $y=3x^2-6x+4$ に重なった。定数 a，b，c の値を求めよ。

[2]　放物線 $y=2x^2-2x+3$ を次の点や直線に関して対称移動した放物線の方程式を求めよ。

(1)　x 軸　　(2)　y 軸　　(3)　原点

[1]　(1)　$y=-2x^2+3x-4=-2\left(x^2-\dfrac{3}{2}x\right)-4=-2\left\{\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\left(\dfrac{3}{4}\right)^2\right\}-4$

$=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2-\dfrac{23}{8}$

よって，この放物線の頂点の座標は $\left(\dfrac{3}{4},\ -\dfrac{23}{8}\right)$

この放物線を x 軸方向に 1，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，頂点の座標は

$\left(\dfrac{3}{4}+1,\ -\dfrac{23}{8}+3\right)$ すなわち $\left(\dfrac{7}{4},\ \dfrac{1}{8}\right)$ に移動する。

したがって，求める放物線の方程式は　$y=-2\left(x-\dfrac{7}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}$ $(=-2x^2+7x-6)$

(2)　放物線 C は，放物線 $y=3x^2-6x+4$ を x 軸方向に 2，y 軸方向に -1 だけ平行移動したものである。

$y=3x^2-6x+4=3(x-1)^2+1$ より，この放物線の頂点の座標は $(1,\ 1)$

よって，放物線 C の頂点の座標は $(1+2,\ 1-1)$ すなわち $(3,\ 0)$ である。

したがって，放物線 C の方程式は　$y=3(x-3)^2=3x^2-18x+27$

ゆえに　$a=3$，$b=-18$，$c=27$

[２]　$y=2x^2-2x+3=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$ より，この放物線の頂点の座標は $\left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$

(1)　頂点は $\left(\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ に移動し，上に凸となる。

よって，求める方程式は

$$y=-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$$

$$\left(y=-2x^2+2x-3\right)$$

(2)　頂点は $\left(-\frac{1}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ に移動し，下に凸のまま。

よって，求める方程式は

$$y=2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{2}$$

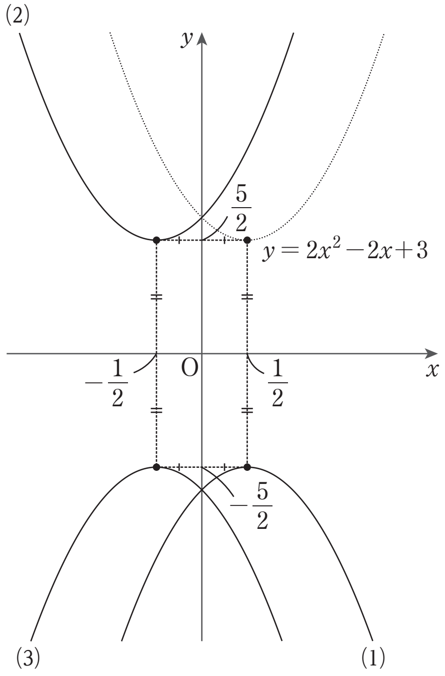
$$\left(y=2x^2+2x+3\right)$$

(3)　頂点は $\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right)$ に移動し，上に凸となる。

よって，求める方程式は

$$y=-2\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{2}$$

$$\left(y=-2x^2-2x-3\right)$$



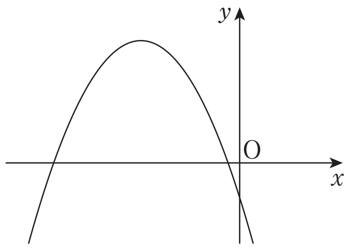
PART3　２次関数の係数の符号

3　２次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフが右図のようになるとき，次の値の符号を調べよ。

(1)　a　　(2)　b

(3)　c　　(4)　b^2-4ac

(5)　$a+b+c$



$y=ax^2+bx+c=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$　　頂点の座標は $\left(-\dfrac{b}{2a},\ -\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$

(1)　グラフは上に凸であるから　$a<0$

(2)　軸が y 軸より左にあるから　$-\dfrac{b}{2a}<0$

　(1)より，$a<0$ であるから　$b<0$

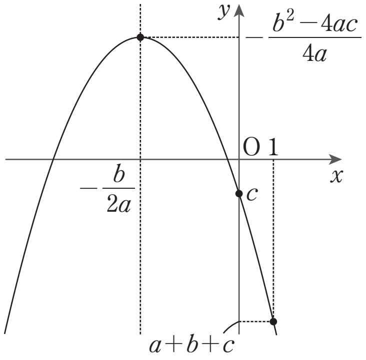
(3)　$x=0$ のとき $y=c$ であるから　$c<0$

(4)　頂点の y 座標が正であるから　$-\dfrac{b^2-4ac}{4a}>0$

　(1)より，$a<0$ であるから　$b^2-4ac>0$

(5)　$a+b+c$ は，$x=1$ のときの y 座標である。

　グラフより，$x=1$ のとき $y<0$ であるから　$a+b+c<0$



第 4 講　2 次関数の最大・最小，2 次関数の決定

PART1　2次関数の最大・最小

1　関数 $f(x)=x^2-4x-5\ (a\leqq x\leqq a+2)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　最小値 $m(a)$ を求めよ。　　(2)　最大値 $M(a)$ を求めよ。

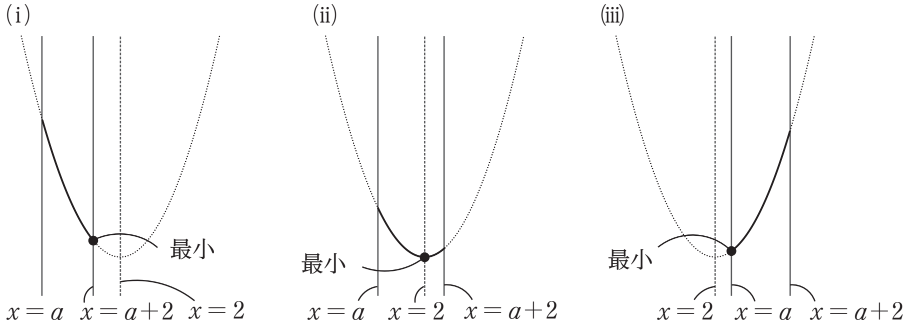
$f(x)=x^2-4x-5=(x-2)^2-9$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸は直線 $x=2$

(1)　(i)　$a+2<2$ つまり $a<0$ のとき　$m(a)=f(a+2)=a^2-9$

(ii)　$a\leqq 2\leqq a+2$ つまり $0\leqq a\leqq 2$ のとき　$m(a)=f(2)=-9$

(iii)　$2<a$ のとき　$m(a)=f(a)=a^2-4a-5$



(i)～(iii)より

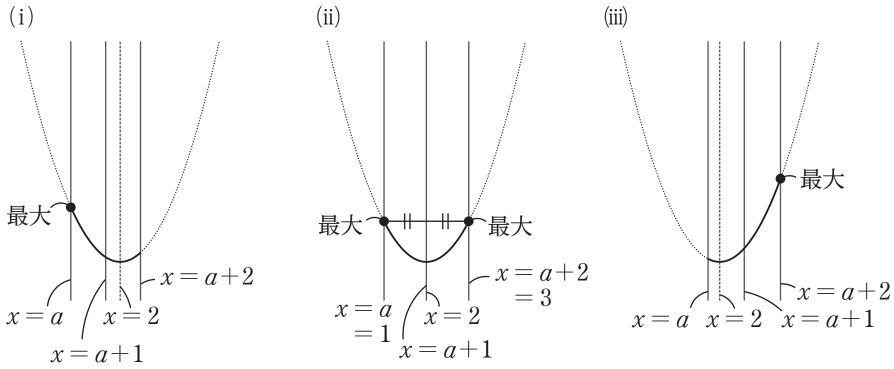
$$m(a)=\begin{cases}a^2-9 & (a<0)\\ -9 & (0\leqq a\leqq 2)\\ a^2-4a-5 & (2<a)\end{cases}$$

(2)　区間 $a\leqq x\leqq a+2$ の中央は $x=a+1$

(i)　$a+1<2$ つまり $a<1$ のとき　$M(a)=f(a)=a^2-4a-5$

(ii)　$a+1=2$ つまり $a=1$ のとき　$M(a)=f(1)=f(3)=-8$

(iii)　$2<a+1$ つまり $1<a$ のとき　$M(a)=f(a+2)=a^2-9$



(i)〜(iii)より

$$M(a)=\begin{cases} a^2-4a-5 & (a<1) \\ -8 & (a=1) \\ a^2-9 & (1<a) \end{cases}$$

PART2　2変数関数の最大・最小，4次関数の最大・最小

2　［1］　$x+y=3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$3x^2+2y^2$ の最小値を求めよ。

(2)　$x \geqq 2$，$y \geqq -1$ のとき，$3x^2+2y^2$ の最大値，最小値を求めよ。

［2］　関数 $y=x^4+4x^2+3$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2=t$ とおき，y を t の式で表せ。

(2)　t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　y の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

［1］(1)　$x+y=3$ より　$y=3-x$

これを $3x^2+2y^2$ に代入すると

$$3x^2+2y^2=3x^2+2(3-x)^2=5x^2-12x+18=5\left(x-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{54}{5}$$

よって，$x=\dfrac{6}{5}$ のとき最小値 $\dfrac{54}{5}$ をとる。

$x=\dfrac{6}{5}$ のとき　$y=3-\dfrac{6}{5}=\dfrac{9}{5}$

したがって　$x=\dfrac{6}{5}$，$y=\dfrac{9}{5}$ のとき 最小値 $\dfrac{54}{5}$

(2)　$y \geqq -1$，$y=3-x$ より $3-x \geqq -1$　　よって $x \leqq 4$

これと $x \geqq 2$ より　$2 \leqq x \leqq 4$

$2 \leqq x \leqq 4$ の範囲において，$3x^2+2y^2=5\left(x-\dfrac{6}{5}\right)^2+\dfrac{54}{5}$ は，$x=4$ のとき最大値 50，

$x=2$ のとき最小値 14 をとる。

$x=4$ のとき　$y=3-4=-1$，$x=2$ のとき　$y=3-2=1$

したがって

$x=4$，$y=-1$ のとき　最大値 50

$x=2$，$y=1$ のとき　最小値 14

［2］ (1)　$y=x^4+4x^2+3$

$=(x^2)^2+4x^2+3=t^2+4t+3$

(2)　$t=x^2$ より　$t \geqq 0$

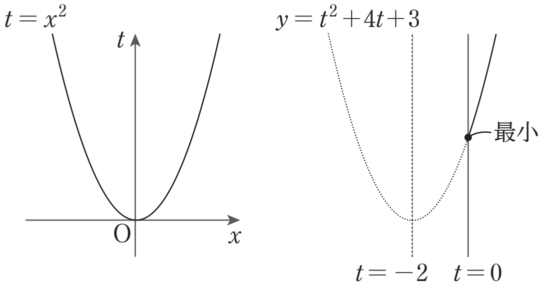
(3)　$y=t^2+4t+3=(t+2)^2-1$

$t \geqq 0$ の範囲で，y は $t=0$ のとき

最小値 3 をとる。

$t=0$ のとき　$x^2=0$ より $x=0$

したがって $x=0$ のとき　最小値 3



PART3　2次関数の決定

3 (1) 放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ。

(2) 定義域を $-2 \leqq x \leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(1) 求める放物線の頂点は直線 $y=2x+1$ 上の点であるから，$(p,\ 2p+1)$ とおける。

さらに求める放物線は，放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したものであることから

求める放物線の方程式は　$y=-2(x-p)^2+2p+1$　とおける。

これが点 $(2,\ 5)$ を通るから

$$5=-2(2-p)^2+2p+1 \qquad p^2-5p+6=0 \qquad p=2,\ 3$$

よって，求める放物線の方程式は　$y=-2(x-2)^2+5$，$y=-2(x-3)^2+7$

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=b$　これは x の値に関わらず一定であるから不適。

$a \neq 0$ のとき　$f(x)$ は 2 次関数である。

$$f(x)=ax^2+2ax+b=a(x+1)^2-a+b$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=-1$ であり，定義域 $-2 \leqq x \leqq 1$ に含まれる。

$a>0$ のとき

$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線

よって，最大値は $f(1)=3a+b$，最小値は $f(-1)=-a+b$ であることにより

$$3a+b=6,\ -a+b=3$$

これを解くと $a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{15}{4}$　これは $a>0$ を満たす。

$a<0$ のとき

$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線

よって，最大値は $f(-1)=-a+b$，最小値は $f(1)=3a+b$ であることにより

$$-a+b=6,\ 3a+b=3$$

これを解くと　$a=-\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{21}{4}$　これは $a<0$ を満たす。

以上より　$(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{15}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{21}{4}\right)$

第 5 講　2次方程式

PART1　2次関数のグラフと x 軸の共有点

1 (1)　次の2次関数のグラフと x 軸の共有点の座標を求めよ。

(i)　$y=-x^2+2x+3$　　(ii)　$y=2x^2-4x+2$　　(iii)　$y=4(x-1)^2-5$

(2)　放物線 $y=3x^2-4x-1$ が x 軸から切り取る線分の長さを求めよ。

(3)　x 軸と2点 $(-1, 0)$, $(2, 0)$ で交わり, 点 $(3, -1)$ を通る放物線の方程式を求めよ。

(1)　(i)　$y=-x^2+2x+3=-(x^2-2x-3)=-(x+1)(x-3)$　より　$(-1,\ 0)$, $(3,\ 0)$

(ii)　$y=2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2$　より　$(1,\ 0)$

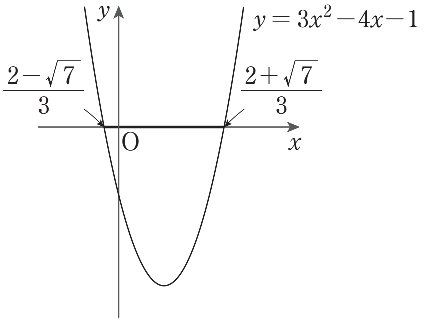
(iii)　$4(x-1)^2-5=0$ より $(x-1)^2=\dfrac{5}{4}$　　$x-1=\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$　　$x=1\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{5}}{2}$

よって　$\left(\dfrac{2-\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$

(2)　$3x^2-4x-1=0$ を解くと　$x=\dfrac{2\pm\sqrt{7}}{3}$

よって，求める線分の長さは

$$\frac{2+\sqrt{7}}{3}-\frac{2-\sqrt{7}}{3}=\frac{2\sqrt{7}}{3}$$



(3)　x 軸と2点 $(-1,\ 0)$, $(2,\ 0)$ で交わることより，求める放物線の方程式は

$$y=a(x+1)(x-2)$$

とおける。これが点 $(3,\ -1)$ を通るので　$-1=a\cdot4\cdot1$　　$a=-\dfrac{1}{4}$

よって，求める放物線の方程式は　$y=-\dfrac{1}{4}(x+1)(x-2)$

すなわち　$y=-\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{2}$

PART2　関数のグラフと x 軸の共有点

2　関数 $y=mx^2+2x+1$ …… ①について，次の問いに答えよ。

(1)　①のグラフと x 軸の共有点の個数を求めよ。

(2)　①のグラフが x 軸と接するとき，その接点の座標を求めよ。

(1)　$m=0$ のとき

①は　　$y=2x+1$

よって，①のグラフと x 軸の共有点の個数は　1 個

$m\neq 0$ のとき

①は 2 次関数を表す。

2 次方程式 $mx^2+2x+1=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=1^2-m\cdot 1=-m+1$$

$-m+1>0$ つまり $m<1$ のとき $D>0$ より，①のグラフと x 軸の共有点の個数は 2 個

$-m+1=0$ つまり $m=1$ のとき $D=0$ より，①のグラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

$-m+1<0$ つまり $m>1$ のとき $D<0$ より，①のグラフと x 軸の共有点の個数は 0 個

以上より

$m<0$，$0<m<1$ のとき 2 個

$m=0$，1 のとき 1 個

$m>1$ のとき 0 個

(2)　①のグラフが x 軸と接するのは，(1)より $m=1$ のとき

このとき①は $y=x^2+2x+1=(x+1)^2$ より，求める接点の座標は $(-1,\ 0)$

PART3　2次方程式の共通解

3　k を実数の定数とし，2 つの 2 次方程式 $x^2-x+k-4=0$，$x^2+3x-k=0$ がただ 1 つの共通な実数解をもつような k の値と，そのときの共通解を求めよ。

共通な実数解を α とおき，2 つの 2 次方程式に代入すると

$$\alpha^2-\alpha+k-4=0 \cdots\cdots ①,\quad \alpha^2+3\alpha-k=0 \cdots\cdots ②$$

① + ②より

$$2\alpha^2+2\alpha-4=0 \qquad \alpha^2+\alpha-2=0 \qquad (\alpha+2)(\alpha-1)=0 \qquad \alpha=-2,\ 1$$

(i)　$\alpha=-2$ のとき

②より　$k=(-2)^2+3\cdot(-2)=-2$

このとき，2 つの 2 次方程式は

$$x^2-x-6=0,\quad x^2+3x+2=0$$

となり，それぞれの解は

$$(x+2)(x-3)=0 \qquad x=-2,\ 3$$

$$(x+2)(x+1)=0 \qquad x=-2,\ -1$$

であるから，2 つの 2 次方程式はただ 1 つの共通な実数解 $x=-2$ をもつ。

(ii)　$\alpha=1$ のとき

②より　$k=1^2+3\cdot1=4$

このとき，2 つの 2 次方程式は

$$x^2-x=0,\quad x^2+3x-4=0$$

となり，それぞれの解は

$$x(x-1)=0 \qquad x=0,\ 1$$

$$(x+4)(x-1)=0 \qquad x=-4,\ 1$$

であるから，2 つの 2 次方程式はただ 1 つの共通な実数解 $x=1$ をもつ。

(i)，(ii)より

$k=-2$，共通解 $x=-2$　または　$k=4$，共通解 $x=1$

第 6 講　2 次不等式

PART1　2次不等式の解法とその解

1　(1)　x についての 2 次不等式 $x^2-(1-a)x-a>0$ を解け。ただし，a は実数とする。

(2)　2 次不等式 $ax^2+bx+12>0$ の解が $-2<x<3$ であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

(1)　$x^2-(1-a)x-a>0$ より $(x+a)(x-1)>0$

(i)　$-a<1$ つまり $a>-1$ のとき

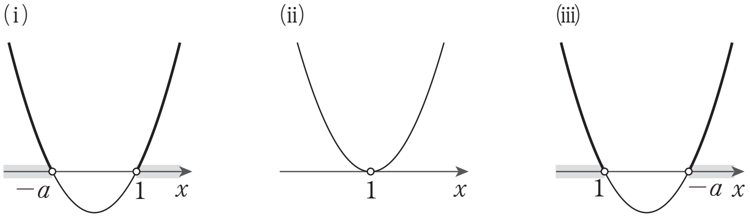
求める解は　$x<-a$，$1<x$

(ii)　$-a=1$ つまり $a=-1$ のとき

求める解は　$x=1$ 以外のすべての実数

(iii)　$1<-a$ つまり $a<-1$ のとき

求める解は　$x<1$，$-a<x$



(i)〜(iii)より

$a>-1$ のとき　$x<-a$，$1<x$

$a=-1$ のとき　$x=1$ 以外のすべての実数

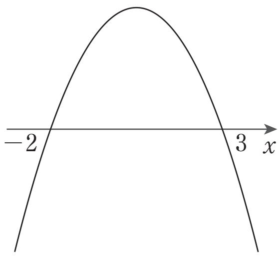
$a<-1$ のとき　$x<1$，$-a<x$

(2)　条件より，2 次関数 $y=ax^2+bx+12$ のグラフは上に凸であり，x 軸との共有点の x 座標は $x=-2$，3 である。

すなわち，$a<0$ かつ 2 次方程式 $ax^2+bx+12=0$ の 2 つの解が $x=-2$，3 である。

ゆえに　$a<0$，$4a-2b+12=0$，$9a+3b+12=0$

よって　$a=-2$，$b=2$（$a<0$ を満たす）



PART2　つねに成り立つ不等式

2 すべての実数 x に対して，不等式 $(a^2-1)x^2+(a-1)x+1>0$ が成り立つような定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=(a^2-1)x^2+(a-1)x+1$ とおくと

$f(x)=(a+1)(a-1)x^2+(a-1)x+1$

(i)　$a=1$ のとき

$f(x)=1$ となり，すべての実数 x に対して $f(x)>0$ が成り立つ。

(ii)　$a=-1$ のとき

$f(x)=-2x+1$ となり，$x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき $f(x) \leqq 0$ となる。よって不適。

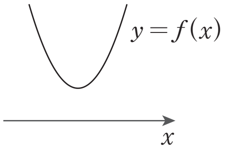
(iii)　$a \neq \pm 1$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは放物線である。

よって，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，すべての実数 x に対して，$f(x)>0$ が成り立つための条件は

$a^2-1>0$ ……①　かつ　$D<0$ ……②

である。



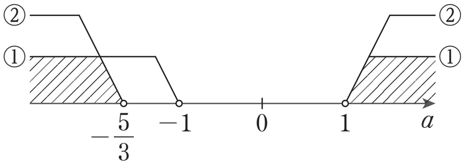
①より　$(a+1)(a-1)>0$　　よって　$a<-1,\ 1<a$

②より　$(a-1)^2-4(a^2-1)\cdot 1<0$

$(a-1)\{(a-1)-4(a+1)\}<0$

$(a-1)(3a+5)>0$

よって　$a<-\dfrac{5}{3},\ 1<a$



①かつ②より $a<-\dfrac{5}{3},\ 1<a$　($a \neq \pm 1$ を満たす)

(i)～(iii)より，求める a の値の範囲は $a<-\dfrac{5}{3},\ 1 \leqq a$

PART3　2次方程式の解の存在範囲

3　2 次方程式 $x^2-mx+3=0$ が 1 より大きい異なる 2 つの実数解をもつような定数 m の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2-mx+3$ とおく。

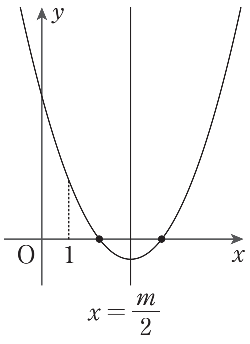
$f(x)=\left(x-\dfrac{m}{2}\right)^2-\dfrac{m^2}{4}+3$ であるから，

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=\dfrac{m}{2}$

2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$D=(-m)^2-4\cdot1\cdot3=m^2-12$$

2 次方程式 $f(x)=0$ が 1 より大きい異なる 2 つの実数解をもつのは，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが，x 軸の $x>1$ の部分と異なる 2 点で交わるときである。



つまり，次の(i)～(iii)が同時に成り立つときである。

(i)　$D>0$

(ii)　軸が $x>1$ の範囲にある

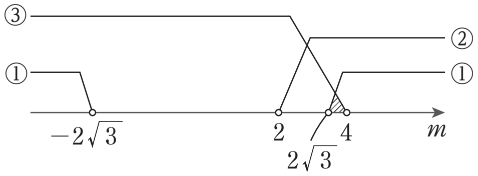
(iii)　$f(1)>0$

(i)～(iii)の条件から，m の値の範囲を求める。

(i)　$m^2-12>0$ より $m<-2\sqrt{3}$，$2\sqrt{3}<m$ …… ①

(ii)　$\dfrac{m}{2}>1$ より $m>2$　…… ②

(iii)　$f(1)=4-m>0$ より $m<4$　…… ③



①，②，③の共通範囲を求めて

$$2\sqrt{3}<m<4$$

第 7 講　2 次関数の様々な問題

PART1　ある範囲でつねに成り立つ不等式

1　2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ について，次の条件が成り立つ定数 a の値の範囲を求めよ。

(1)　$1\leqq x\leqq 3$ で，つねに $f(x)>0$ が成り立つ。

(2)　$1\leqq x\leqq 3$ で，つねに $f(x)<0$ が成り立つ。

$f(x)=x^2-2ax+1=(x-a)^2-a^2+1$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸の方程式は $x=a$

(1)　求める条件は 2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ の $1\leqq x\leqq 3$ における最小値が正となることである。

$1\leqq x\leqq 3$ における最小値は

(i)　軸 $x=a$ が $1\leqq x\leqq 3$ にあるとき　$f(a)=-a^2+1$

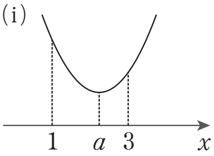
(ii)　(i)以外のとき　$f(1)=-2a+2$ または $f(3)=-6a+10$である。

(i)のとき，すなわち $1\leqq a\leqq 3$ のとき

$-a^2+1>0$ より $a^2<1$　　$-1<a<1$

これは $1\leqq a\leqq 3$ を満たさない。

(i)

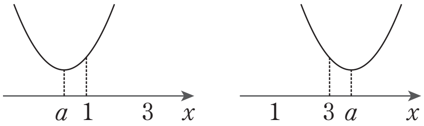


(ii)のとき，すなわち $a<1$ または $3<a$ のとき

$f(1)=-2a+2>0$ かつ $f(3)=-6a+10>0$ より

$a<1$ かつ $a<\dfrac{5}{3}$　　よって　$a<1$

(ii)



$a<1$ または $3<a$ より　$a<1$

以上より，求める a の値の範囲は　$a<1$

(2)　求める条件は 2 次関数 $f(x)=x^2-2ax+1$ の $1 \leqq x \leqq 3$ における最大値が負となることである。

$1 \leqq x \leqq 3$ における最大値は $f(1)$ または $f(3)$

よって

$$f(1)<0 \text{ かつ } f(3)<0$$

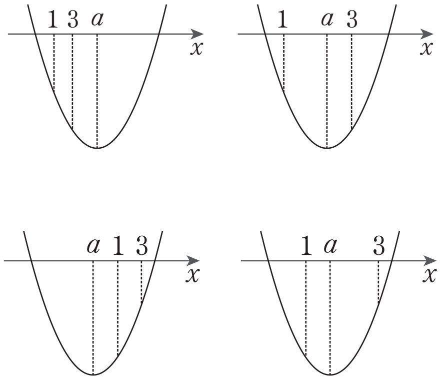
より

$$-2a+2<0 \text{ かつ } -6a+10<0$$

したがって

$$a>1 \text{ かつ } a>\frac{5}{3}$$

より，求める a の値の範囲は　$a>\dfrac{5}{3}$



PART2　絶対値を含む2次方程式の解の個数

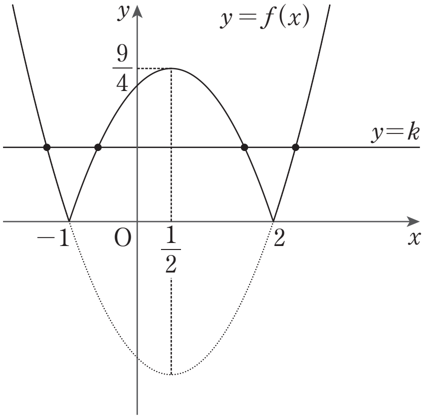
2 (1) x の方程式 $|x^2-x-2|=k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし，k は定数とする。

(2) x の方程式 $|x^2+2x-3|=-2x+k$ の異なる実数解の個数を求めよ。ただし, k は定数とする。

(1) $f(x)=|x^2-x-2|$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

$$f(x)=|x^2-x-2|=|(x+1)(x-2)|$$
$$=\left|\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right|$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは右図の実線部分のようになる。よって



$0<k<\dfrac{9}{4}$ のとき　4個

$k=\dfrac{9}{4}$ のとき　3個

$k>\dfrac{9}{4}$，$k=0$ のとき　2個

$k<0$ のとき　0個

(2) $|x^2+2x-3|=-2x+k$ より　$|x^2+2x-3|+2x=k$

$g(x)=|x^2+2x-3|+2x$ とおくと, 求める実数解の個数は, $y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

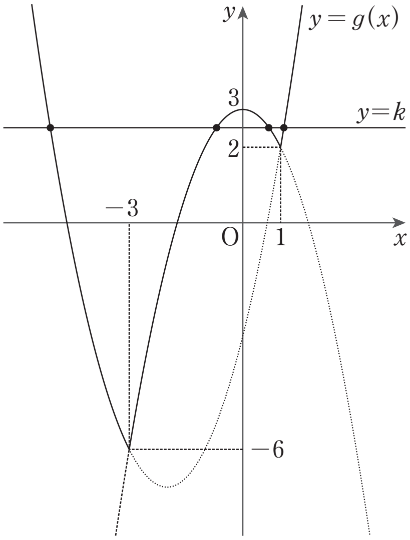
$x^2+2x-3=(x+3)(x-1)$ であるから

$$\begin{cases} x^2+2x-3 \geqq 0 \text{ の解は} \quad x \leqq -3,\ 1 \leqq x \\ x^2+2x-3<0 \text{ の解は} \quad -3<x<1 \end{cases}$$

これより

$$g(x)=\begin{cases} x^2+2x-3+2x=x^2+4x-3=(x+2)^2-7 & (x \leqq -3,\ 1 \leqq x) \\ -(x^2+2x-3)+2x=-x^2+3 & (-3<x<1) \end{cases}$$

ゆえに，$y=g(x)$ のグラフは右図の実線部分のようになる。



よって

$2<k<3$ のとき　4個

$k=2,\ 3$ のとき　3個

$-6<k<2,\ 3<k$ のとき　2個

$k=-6$ のとき　1個

$k<-6$ のとき　0個

PART3　2次方程式の解の存在範囲（少なくとも1つ）

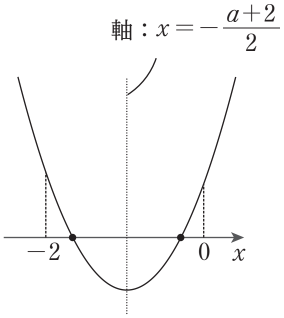
3　2次方程式 $x^2+(a+2)x-a+1=0$ が $-2<x<0$ に少なくとも1つの実数解をもつとき，定数 a の値の範囲を求めよ。

$f(x)=x^2+(a+2)x-a+1$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は

$x=-\dfrac{a+2}{2}$ である。また，2次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とする。

$f(-2)=(-2)^2+(a+2)\cdot(-2)-a+1=-3a+1$，$f(0)=-a+1$

(i)　異なる2つの実数解または重解が $-2<x<0$ にあるとき



$D\geqq 0$ より

$$(a+2)^2-4\cdot1\cdot(-a+1)\geqq 0$$

$a^2+8a\geqq 0$　よって　$a\leqq -8$，$0\leqq a$ ……①

軸 $x=-\dfrac{a+2}{2}$ について

$$-2<-\frac{a+2}{2}<0$$

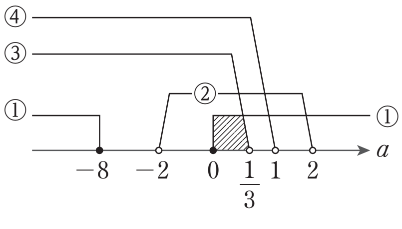
よって　$-2<a<2$ ……②

$f(-2)>0$ より

$-3a+1>0$　　よって　$a<\dfrac{1}{3}$ ……③

$f(0)>0$ より

$-a+1>0$　　よって　$a<1$ ……④



①〜④より $0\leqq a<\dfrac{1}{3}$

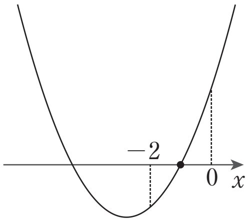
(ii)　2つの解のうち一方が $-2<x<0$ にあり，もう一方の解が $x<-2$ または $0<x$ にあるとき

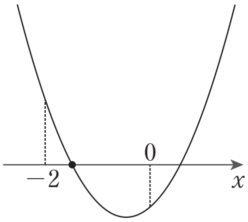
$f(-2)\cdot f(0)<0$ より

$$(-3a+1)(-a+1)<0$$

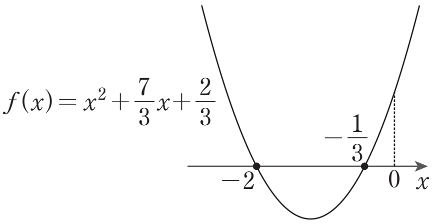
$$(3a-1)(a-1)<0$$

よって　$\dfrac{1}{3}<a<1$





(iii)　解の１つが $x=-2$ のとき



$f(-2)=0$　より　$-3a+1=0$

よって　$a=\dfrac{1}{3}$

このとき

$$f(x)=x^2+\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\left(3x^2+7x+2\right)$$

$$=\frac{1}{3}(3x+1)(x+2)$$

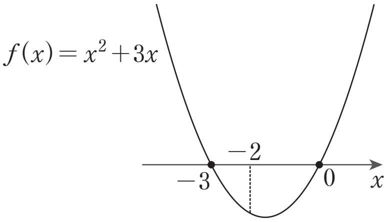
より，２次方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=-\dfrac{1}{3}$，-2

よって，$-2<x<0$ に解を１つもち，条件を満たす。

(iv)　解の１つが $x=0$ のとき

$f(0)=0$　より　$-a+1=0$　　よって　$a=1$

このとき



$$f(x)=x^2+3x=x(x+3)$$

より，２次方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=0$，-3

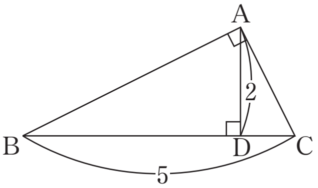
よって，$-2<x<0$ に解をもたず，不適。

(i)～(iv)より，求める a の値の範囲は　$0\leqq a<1$

第 8 講　三角比

PART1　鋭角の三角比

1　[1]　右図のような直角三角形ABCにおいて，頂点Aから辺BCに下ろした垂線と辺BCとの交点をDとする。
AB > AC，BC = 5，AD = 2 とするとき，$\sin B$，$\cos B$ の値を求めよ。



[2]　∠ACB = 90° の直角三角形 ABC で，$\sin A = \dfrac{2}{3}$ のとき，次の三角比の値を求めよ。

(1)　$\cos A$，$\tan A$　　(2)　$\sin B$，$\cos B$，$\tan B$

[1]　△ABD ∽ △CAD より，BD：AD = AD：CD　つまり　BD：2 = 2：CD

よって　BD・CD = 4

BD = x とおくと，CD = $5-x$

したがって，$x\cdot(5-x)=4$　　$x^2-5x+4=0$　　$(x-1)(x-4)=0$　　$x=1, 4$

ここで，AB > AC より　DB > DA かつ DA > DC

ゆえに，BD > CD であるから　BD = 4，CD = 1

△ABD において三平方の定理より　$\text{AB}=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$

よって　$\sin B=\dfrac{2}{2\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos B=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

[2]　(1)　$C=90°$ である直角三角形 ABC において，A は鋭角である。

$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より　$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{5}{9}$

A は鋭角より，$\cos A>0$ であるから　$\cos A=\sqrt{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{2}{3}\div\frac{\sqrt{5}}{3}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

(2)　$B=180°-(90°+A)=90°-A$ より

$$\sin B=\cos A=\frac{\sqrt{5}}{3},\quad \cos B=\sin A=\frac{2}{3},\quad \tan B=\frac{1}{\tan A}=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

PART2 $a=c\sin A$，$b=c\cos A$，$a=b\tan A$

2 ［1］ 1辺の長さが8である正五角形の対角線の長さを求めよ。ただし，必要ならば $\cos 36^\circ=0.8090$ を用いよ。

［2］ 水平な地面のある地点Aから離れたところに地面に垂直に立つ塔がある。地点Aから測った塔の先端の仰角が 45°，地点Aから塔に向かって30m近づいた地点Bから測った仰角が 60° であった。塔の高さを求めよ。ただし，目の高さは考えないものとする。

［1］ 正五角形の1つの内角の大きさは

$$\{180^\circ\times(5-2)\}\div5=108^\circ$$

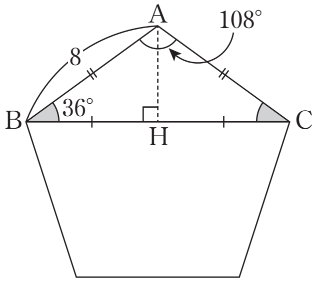
よって，右図の二等辺三角形ABCにおいて，頂角Aの二等分線と辺BCが交わる点をHとすると

$$\angle \mathrm{ABH}=(180^\circ-108^\circ)\div2=36^\circ$$

したがって，$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\cos36^\circ=8\cos36^\circ$

ゆえに，求める対角線の長さは，

$$\mathrm{BC}=2\mathrm{BH}=2\cdot8\cos36^\circ=16\times0.8090=12.944$$



［2］ 塔の先端をD，塔から地面に垂直に下ろした垂線と地面との交点をCとする。$\mathrm{BC}=x$ (m) とすると，

△BCD において

$$\mathrm{CD}=\mathrm{BC}\tan60^\circ=x\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}\,x \quad\cdots\cdots ①$$

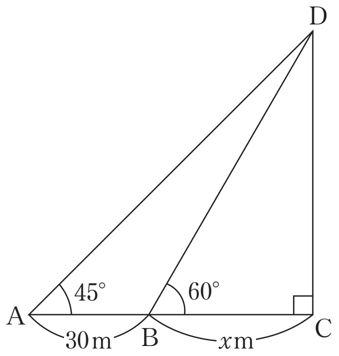
△ACD において

$$\mathrm{CD}=\mathrm{AC}\tan45^\circ=(30+x)\cdot1=30+x \quad\cdots\cdots ②$$

①，②より $\sqrt{3}\,x=30+x$

$$(\sqrt{3}-1)x=30$$

$$x=\frac{30}{\sqrt{3}-1}=15(\sqrt{3}+1)$$



したがって，求める塔の高さは，②より　$\mathrm{CD}=30+15(\sqrt{3}+1)=45+15\sqrt{3}$ (m)

PART3　鈍角の三角比

3　［1］ $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1) $\sin\theta = \dfrac{12}{13}$ のとき，$\cos\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(2) $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

［2］ $\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ のとき，次の式の値を求めよ。

(1) $\sin\theta\cos\theta$　(2) $\sin^3\theta + \cos^3\theta$

(3) $\sin\theta - \cos\theta$　(4) $\sin\theta$，$\cos\theta$

［1］ (1) $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より　$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta = 1 - \left(\dfrac{12}{13}\right)^2 = \dfrac{25}{169}$

$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき，$\cos\theta \geqq 0$ であるから

$$\cos\theta = \frac{5}{13},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{13} \div \frac{5}{13} = \frac{12}{5}$$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta < 0$ であるから

$$\cos\theta = -\frac{5}{13},\quad \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{12}{13} \div \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{12}{5}$$

よって　$(\cos\theta,\ \tan\theta) = \left(\dfrac{5}{13},\ \dfrac{12}{5}\right),\ \left(-\dfrac{5}{13},\ -\dfrac{12}{5}\right)$

(2) $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = 1 + \tan^2\theta = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{5}{4}$ より　$\cos^2\theta = \dfrac{4}{5}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{2} > 0$ より，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ であるから　$\cos\theta > 0$

よって

$$\cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin\theta = \tan\theta \cdot \cos\theta = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

［2］ (1) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の両辺を２乗して

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\frac{1}{2}$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{2}$$

よって

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{1}{4}$$

(2) $\sin^3\theta+\cos^3\theta=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$$

(3) $(\sin\theta-\cos\theta)^2=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=1-2\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{2}$

(1)より　$\sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{4}<0$ であり，

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より　$\sin\theta>0$ であるから　$\cos\theta<0$

したがって，$\sin\theta-\cos\theta>0$ であるから

$$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

(4) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ …… ①，　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ …… ②

(①＋②)÷2 より　$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

(①－②)÷2 より　$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

第 9 講　正弦定理，余弦定理，三角形の面積

PART1　三角形の形状

1　△ABC において，BC $=a$，CA $=b$，AB $=c$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin A : \sin B : \sin C = 3:5:7$ のとき，最も大きい角の大きさを求めよ。

(2)　次の関係式が成り立つとき，△ABC の形状を調べよ。

$$(a-c\cos B)\sin B=(b-c\cos A)\sin A$$

(1)　正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より　$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$

よって，条件より　$a:b:c=3:5:7$

したがって，$a=3k$，$b=5k$，$c=7k$（$k>0$）とおける。

c が最大の辺であるから，C が最大の角である。

よって，余弦定理より

$$\cos C=\frac{(3k)^2+(5k)^2-(7k)^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=\frac{-15k^2}{2\cdot 3k\cdot 5k}=-\frac{1}{2}$$

ゆえに，最大の角の大きさは　$C=120^\circ$

(2)　△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より　$\sin A=\dfrac{a}{2R}$，$\sin B=\dfrac{b}{2R}$

また，余弦定理より　$\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$，　$\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

これらを与えられた等式に代入すると

$$\left(a-c\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\right)\cdot\frac{b}{2R}=\left(b-c\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\cdot\frac{a}{2R}$$

$$\frac{2a^2-(c^2+a^2-b^2)}{2a}\cdot b=\frac{2b^2-(b^2+c^2-a^2)}{2b}\cdot a$$

$$(a^2+b^2-c^2)\cdot b^2=(a^2+b^2-c^2)\cdot a^2$$

$$(a^2+b^2-c^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(a^2+b^2-c^2)(a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$ より　$a^2+b^2=c^2$　または　$a=b$

したがって，△ABC は

$\angle$C $=90^\circ$ の直角三角形　または　BC $=$ CA の二等辺三角形

PART2　三角形の決定

2　△ABC において，$b=1+\sqrt{3}$，$c=2$，$C=45^\circ$ のとき，a，A，B を求めよ。

余弦定理より

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

$$2^2=a^2+(1+\sqrt{3})^2-2\cdot a\cdot(1+\sqrt{3})\cos 45^\circ$$

$$a^2-(\sqrt{6}+\sqrt{2})a+2\sqrt{3}=0$$

$$(a-\sqrt{6})(a-\sqrt{2})=0 \qquad \text{よって} \qquad a=\sqrt{6},\ \sqrt{2}$$

$a=\sqrt{6}$ のとき

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{6})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{1}{2}$$

よって　$A=60^\circ$，$B=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$

$a=\sqrt{2}$ のとき

余弦定理より

$$\cos A=\frac{(1+\sqrt{3})^2+2^2-(\sqrt{2})^2}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{6+2\sqrt{3}}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{2\sqrt{3}(1+\sqrt{3})}{2\cdot(1+\sqrt{3})\cdot 2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって　$A=30^\circ$，$B=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)=105^\circ$

以上より　$a=\sqrt{6}$，$A=60^\circ$，$B=75^\circ$　または　$a=\sqrt{2}$，$A=30^\circ$，$B=105^\circ$

PART3　三角形の面積

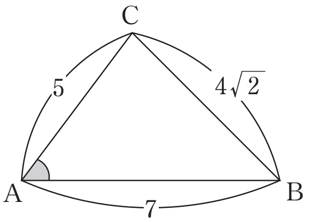
3　△ABC において，AB＝7，BC＝$4\sqrt{2}$，CA＝5 のとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積 S を求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径 r を求めよ。

(3)　△ABC の外接円の半径 R を求めよ。

(1)　余弦定理より，$\cos A=\dfrac{7^2+5^2-(4\sqrt{2})^2}{2\cdot7\cdot5}=\dfrac{42}{2\cdot7\cdot5}=\dfrac{3}{5}$



$\sin A>0$ より　$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$

したがって　$S=\dfrac{1}{2}\cdot\text{AB}\cdot\text{AC}\cdot\sin A=\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot5\cdot\dfrac{4}{5}=14$

（別解）　$s=\dfrac{1}{2}(7+4\sqrt{2}+5)=6+2\sqrt{2}$ とおくと，ヘロンの公式より

$$S=\sqrt{s(s-7)(s-4\sqrt{2})(s-5)}$$
$$=\sqrt{(6+2\sqrt{2})(-1+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(1+2\sqrt{2})}$$
$$=\sqrt{\{6^2-(2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{2})^2-1^2\}}=\sqrt{28\cdot7}=14$$

(2)　$S=\dfrac{1}{2}r(\text{AB}+\text{BC}+\text{CA})$ より

$$14=\frac{1}{2}r(7+4\sqrt{2}+5)\qquad(6+2\sqrt{2})r=14$$

$$r=\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{9-2}=3-\sqrt{2}$$

(3)　正弦定理より

$$R=\frac{\text{BC}}{2\sin A}=4\sqrt{2}\div\left(2\cdot\frac{4}{5}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

（別解）　$S=\dfrac{\text{AB}\cdot\text{BC}\cdot\text{CA}}{4R}$　より　$R=\dfrac{\text{AB}\cdot\text{BC}\cdot\text{CA}}{4S}=\dfrac{7\cdot4\sqrt{2}\cdot5}{4\cdot14}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

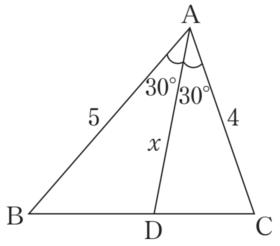
第 10 講　図形の計量

PART1　角の二等分線の長さ

1 (1)　△ABC において，AB＝5，AC＝4，∠A＝60° とする。∠A の二等分線と辺 BC との交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。

(2)　△ABC において，AB＝6，BC＝5，CA＝4 とする。∠C の二等分線と辺 AB との交点を D とするとき，線分 CD の長さを求めよ。

(1)　AD＝x とおく。△ABC＝△ABD＋△ACD より



$$\frac{1}{2}\cdot5\cdot4\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot5\cdot x\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot4\cdot x\sin30^\circ$$

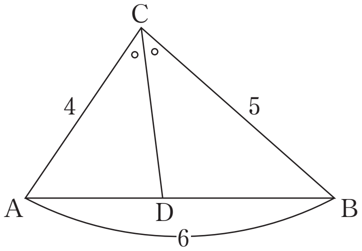
$$5\cdot4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5x\cdot\frac{1}{2}+4x\cdot\frac{1}{2}$$

$$9x=20\sqrt{3}$$

$$x=\frac{20\sqrt{3}}{9}$$

よって　$\text{AD}=\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$

(2)　CD は ∠C の二等分線であるから



$$\text{AD}:\text{BD}=\text{CA}:\text{CB}=4:5$$

よって　$\text{AD}=\dfrac{4}{9}\text{AB}=\dfrac{4}{9}\cdot6=\dfrac{8}{3}$

△ABC で余弦定理より

$$\cos A=\frac{4^2+6^2-5^2}{2\cdot4\cdot6}=\frac{27}{2\cdot4\cdot6}=\frac{9}{16}$$

△ACD で余弦定理より

$$\text{CD}^2=4^2+\left(\frac{8}{3}\right)^2-2\cdot4\cdot\frac{8}{3}\cdot\frac{9}{16}=\frac{100}{9}$$

よって　$\text{CD}=\dfrac{10}{3}$

PART2　円に内接する四角形の面積

2　AB＝BC＝3，CD＝5，DA＝8 である四角形 ABCD が円に内接している。

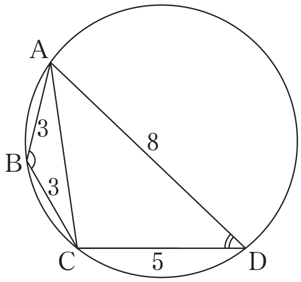
(1)　対角線 AC の長さを求めよ。

(2)　四角形 ABCD の面積を求めよ。

(1)　四角形 ABCD は円に内接するから

$$D=180^\circ-B$$

△ABC で余弦定理より



$$\mathrm{AC}^2=3^2+3^2-2\cdot3\cdot3\cos B$$
$$=18-18\cos B \quad \cdots\cdots ①$$

△ADC で余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=8^2+5^2-2\cdot8\cdot5\cos(180^\circ-B)$$
$$=89+80\cos B \quad \cdots\cdots ②$$

①，②より　$18-18\cos B=89+80\cos B$

$$\cos B=-\frac{71}{98}$$

このとき，①より

$$\mathrm{AC}^2=18-18\cdot\left(-\frac{71}{98}\right)=18\left(1+\frac{71}{98}\right)=18\cdot\frac{169}{98}=\frac{9\cdot169}{49}$$

よって　$\mathrm{AC}=\dfrac{3\cdot13}{7}=\dfrac{39}{7}$

(2)　$\sin B>0$ より

$$\sin B=\sqrt{1-\left(-\frac{71}{98}\right)^2}=\sqrt{\frac{98^2-71^2}{98^2}}=\frac{\sqrt{(98+71)(98-71)}}{98}=\frac{\sqrt{169\cdot27}}{98}=\frac{39\sqrt{3}}{98}$$

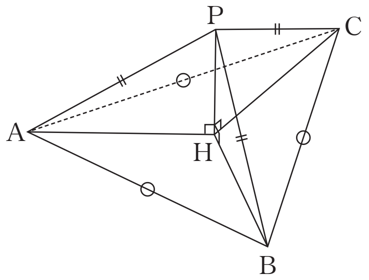
よって，四角形 ABCD の面積を S とすると

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot3\cdot3\sin B+\frac{1}{2}\cdot8\cdot5\sin(180^\circ-B)$$
$$=\frac{9}{2}\sin B+\frac{40}{2}\sin B=\frac{49}{2}\sin B=\frac{49}{2}\cdot\frac{39\sqrt{3}}{98}=\frac{39\sqrt{3}}{4}$$

PART3　3辺の長さが等しい四面体の高さと体積

3　PA＝PB＝PC＝4, AB＝BC＝CA＝6 である四面体PABCの体積 V を求めよ。

頂点Pから △ABC に垂線PHを下ろすと，直線PHは平面ABC上のすべての直線と垂直である。



△PAH，△PBH，△PCH について

$$\angle \mathrm{PHA}=\angle \mathrm{PHB}=\angle \mathrm{PHC}=90^\circ$$

$$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$$

PHは共通

であるから　△PAH≡△PBH≡△PCH

よって　AH＝BH＝CH

したがって，点Hは △ABC の外接円の中心であり，AH, BH, CH はその外接円の半径である。

△ABC で正弦定理より

$$2\mathrm{AH}=\frac{6}{\sin 60^\circ}$$

よって

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{2}\times 6\div\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}$$

したがって，△PAH で三平方の定理より

$$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{4^2-(2\sqrt{3})^2}=2$$

$$\triangle \mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\sin 60^\circ=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=9\sqrt{3}$$

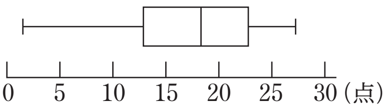
以上より，四面体PABCの体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle \mathrm{ABC}\cdot \mathrm{PH}=\frac{1}{3}\cdot 9\sqrt{3}\cdot 2=6\sqrt{3}$$

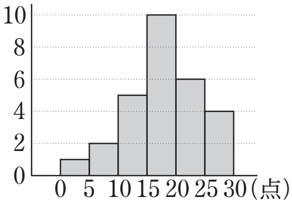
第 11 講　データの分析

PART1　箱ひげ図

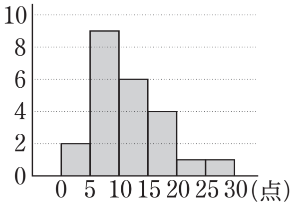
1 (1)　右の箱ひげ図を表すデータを使ってかいたヒストグラムとして，正しいものを次からすべて選べ。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。



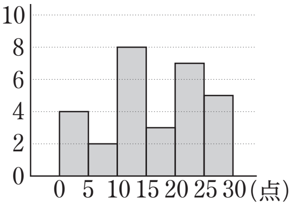
①



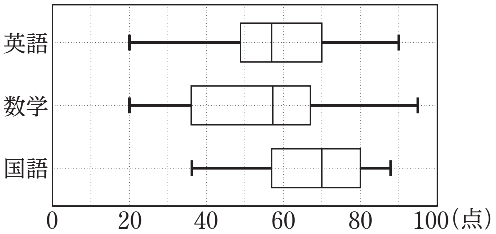
②



③



(2)　右図は，ある学校の 1 年生 50 人に行った英語，数学，国語のテストの得点を表したものである。この図から読みとれることとして，正しいものを次からすべて選べ。



①　散らばりの度合いが最も大きいのは数学である。

②　60 点以上の生徒は，英語では 25 人以下であるが，国語では 25 人以上である。

③　80 点以上の生徒は，国語より数学の方が多い。

(1)　箱ひげ図から，次のことが読み取れる。

(i)　最大値は 25 点以上 30 点未満であり，最小値は 0 点以上 5 点未満である。

(ii)　第 1 四分位数 Q_1 は 10 点以上 15 点未満，第 2 四分位数 Q_2 は 15 点以上 20 点未満，第 3 四分位数 Q_3 は 20 点以上 25 点未満である。

ヒストグラム①，②，③はすべて(i)を満たしている。

データ①，②，③が(ii)を満たすか見ていく。

ヒストグラム①

データの大きさは 28 であり，Q_1 は下から 7 番目と 8 番目の値の平均値で 10 点以上 15 点未満，Q_2 は下から 14 番目と 15 番目の値の平均値で 15 点以上 20 点未満，Q_3 は下から 21 番目と 22 番目の値の平均値で 20 点以上 25 点未満である。

これらの値は(ii)を満たす。

ヒストグラム②

データの大きさは 23 であり，Q_1 は下から 6 番目の値で 5 点以上 10 点未満であり，この値は(ii)を満たさず不適。

ヒストグラム③

データの大きさは 29 であり，Q_1 は下から 7 番目と 8 番目の値の平均値で 10 点以上 15 点未満，Q_2 は下から 15 番目の値で 15 点以上 20 点未満，Q_3 は下から 22 番目と 23 番目の値の平均値で 20 点以上 25 点未満である。

これらの値は(ii)を満たす。

以上より，正しいものは　①，③

(2)　①について

範囲，四分位範囲ともに数学が最も大きい。

よって，①は正しい。

②について

英語のデータの中央値は 60 点より小さく，下から 25 番目と 26 番目の値の平均値であるから，60 点以上の生徒は多くとも 25 人，すなわち 25 人以下である。

国語のデータの中央値は 60 点より大きいから，60 点以上の生徒は少なくとも 25 人，すなわち 25 人以上である。

よって，②は正しい。

③について

数学のデータの Q_3 は 80 点より小さいから，80 点以上の生徒は 12 人以下である。

国語のデータの Q_3 は 80 点であるから，80 点以上の生徒は 13 人以上である。

よって，80 点以上の生徒は，国語より数学の方が少なく，③は誤りである。

以上より，正しいものは　①，②

PART2　変量の変換

2　a，b を定数とする。変量 u と，u に対し $x=au+b$ によって定義される変量 x について，u，x の平均値をそれぞれ $\overline{u}$，$\overline{x}$，分散をそれぞれ ${s_u}^2$，${s_x}^2$ とすると

$$\overline{x}=a\overline{u}+b,\quad {s_x}^2=a^2{s_u}^2$$

が成り立つ。これを利用して，次の変量 x のデータの平均値，分散を，$u=\dfrac{x-520}{6}$ とおくことによって求めよ。

526，484，532，538，550，502

$u=\dfrac{x-520}{6}$ とおくと，$x-520$，u，u^2 の値は以下のようになる。

x	526	484	532	538	550	502	計
$x-520$	6	-36	12	18	30	-18	12
u	1	-6	2	3	5	-3	2
u^2	1	36	4	9	25	9	84

よって　$\overline{u}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$

ここで，$u=\dfrac{x-520}{6}$　より　$x=6u+520$

したがって　$\overline{x}=6\overline{u}+520=6\cdot\dfrac{1}{3}+520=522$

また，${s_u}^2=\overline{u^2}-(\overline{u})^2=\dfrac{84}{6}-\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{125}{3^2}$　より　${s_x}^2=6^2{s_u}^2=6^2\cdot\dfrac{125}{3^2}=500$

PART3　データの修正による変化

3 右の表のような2つの変量 x, y のデータがあり，x, y の平均値はそれぞれ25，14である。

データの番号	①	②	③	④	⑤
x	25	21	23	29	27
y	17	8	11	20	14

(1) データに誤りがあり，番号①の x の値が正しくは20であった。このデータを修正すると，x の平均値はいくら減少するか。

(2) 次の(i)，(ii)のそれぞれについて，［　　］に当てはまるものを，下のア，イ，ウから選べ。

(i) データに誤りがあり，番号③の y の値が正しくは13，番号④の y の値が正しくは18であった。このデータを修正するとき，y の分散は修正前と比べて［　　］。

(ii) x の値が25，y の値が14であるデータを追加すると，x と y の相関係数は追加前と比べて［　　］。

ア　増加する　　イ　減少する　　ウ　変化しない

(1) 番号①の x の値を25から20に修正すると，x の総和は5減少する。

よって，修正前の x の総和を s とすると，修正後の x の平均値は

$$\frac{s-5}{5}=\frac{s}{5}-1$$

となり，修正前の x の平均値 $\frac{s}{5}$ より1減少する。

(2) (i) 番号③の y の値を11から13に，番号④の y の値を20から18に修正すると，y の総和は変化せず，y の平均値も14から変化しない。

修正した2つのデータについて，偏差の2乗の和は

$$(13-14)^2+(18-14)^2=17$$

となり，修正前の偏差の2乗の和 $(11-14)^2+(20-14)^2=45$ と比べて減少するから修正後の y の分散は修正前と比べて減少する（イ）。

(ii) 追加するデータの x の値25，y の値14は，それぞれ x, y の平均値と一致している。

よって，このデータを追加すると x, y ともに平均値は変化しない。

したがって，追加前の x，y の偏差の 2 乗の和をそれぞれ X，Y とすると，追加後の

x の偏差の 2 乗の和は　$X+(25-25)^2=X$

y の偏差の 2 乗の和は　$Y+(14-14)^2=Y$

となり，ともに変化しない。

また，追加前の x と y の偏差の積の和を S とすると，追加後の偏差の積の和は

$S+(25-25)(14-14)=S$

となり，変化しない。

したがって，x と y の相関係数は

追加前：$\dfrac{\dfrac{S}{5}}{\sqrt{\dfrac{X}{5}}\sqrt{\dfrac{Y}{5}}}=\dfrac{S}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}$　　追加後：$\dfrac{\dfrac{S}{6}}{\sqrt{\dfrac{X}{6}}\sqrt{\dfrac{Y}{6}}}=\dfrac{S}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}$

となり，追加前と比べて変化しない（ウ）。

[MEMO]

確認問題　解答

第 1 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2，ウ：3

[解説]

$$
\begin{aligned}
&-4xy-6yz+2x^2+3zx \\
&=-2y(2x+3z)+2x^2+3zx \quad \text{[A]} \\
&=-2y(2x+3z)+x(2x+3z) \\
&=(-2y+x)(2x+3z) \\
&=\boldsymbol{(x-2y)(2x+3z)}
\end{aligned}
$$

[A]　次数の低い方の文字について整理する。

2

[正解] エ：2，オ：3，カ：4

[解説]

$$
\begin{aligned}
&x^2+4xy+3y^2+2x-2y-8 \\
&=x^2+(4y+2)x+3y^2-2y-8 \quad \text{[B]} \\
&=x^2+(4y+2)x+(y-2)(3y+4) \\
&=\boldsymbol{(x+y-2)(x+3y+4)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & y-2 & \longrightarrow & y-2 \\
1 & 3y+4 & \longrightarrow & 3y+4 \\
\hline
1 & (y-2)(3y+4) & & 4y+2
\end{array}
$$

[B]　x，y のどちらについても 2 次式であるから，どちらかの文字について整理する。

3

[正解] キ：③

[解説]

$$
\begin{aligned}
&a^2b-a^2c+b^2a-c^2a+b^2c-c^2b \\
&=(b-c)a^2+(b^2-c^2)a+b^2c-c^2b \quad \text{[C]} \\
&=(b-c)a^2+(b-c)(b+c)a+bc(b-c) \\
&=(b-c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\
&=(b-c)(a+b)(a+c) \\
&=\boldsymbol{(a+b)(b-c)(c+a)}
\end{aligned}
$$

[C]　a，b，c のいずれについても 2 次式であるから，いずれかの文字について整理する。

4 **[正解]** ク：3，ケ：4，コ：3，サ：4

[解説]

$$x^4-x^2+16$$
$$=(x^4+8x^2+16)-9x^2$$
$$=(x^2+4)^2-(3x)^2 \quad \text{[D]}$$
$$=\{(x^2+4)+3x\}\{(x^2+4)-3x\}$$
$$=\boldsymbol{(x^2+3x+4)(x^2-3x+4)}$$

[D]　平方の差の形（●^{2}－▲^{2}）を作る。

第 1 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：9，イ：5，ウ：6，エ：3，オ：5

[解説]

$\sqrt{86-18\sqrt{5}}=\sqrt{86-2\sqrt{9^2\cdot 5}}$

$=\sqrt{(81+5)-2\sqrt{81\cdot 5}}$ [A]

$=\sqrt{(\sqrt{81}-\sqrt{5})^2}$

$=\sqrt{81}-\sqrt{5}=\mathbf{9-\sqrt{5}}$

$2^2<5<3^2$ より　$\sqrt{2^2}<\sqrt{5}<\sqrt{3^2}$ [B]

すなわち　$2<\sqrt{5}<3$

よって　$-3<-\sqrt{5}<-2$

ゆえに　$9-3<9-\sqrt{5}<9-2$

$6<9-\sqrt{5}<7$

よって，整数部分 a は　$a=\mathbf{6}$

小数部分 b は　$b=(9-\sqrt{5})-a$ [C]

$=(9-\sqrt{5})-6$

$=\mathbf{3-\sqrt{5}}$

[A]　$a>0$，$b>0$ とする。
① $\sqrt{(a+b)+2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$
② $a>b$ のとき
$\sqrt{(a+b)-2\sqrt{ab}}=\sqrt{a}-\sqrt{b}$

[B]　$\sqrt{■}$ の整数部分を調べるには，
$n^2\leqq ■<(n+1)^2$
となる整数 n を見つける。

[C]
(小数部分)＝(もとの数)－(整数部分)

2 [正解] カ：4，キ：3，ク：6，ケコ：14，サ：2

[解説]

(1) $x^2+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$ [D] [E]

$=(\sqrt{6})^2-2\cdot1=\mathbf{4}$

(2) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^3-3\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ [E]

$=(\sqrt{6})^3-3\cdot1\cdot\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{6}}$

（別解）

$x^3+\dfrac{1}{x^3}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-x\cdot\dfrac{1}{x}\cdot\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ [E]

$=\sqrt{6}\cdot4-1\cdot\sqrt{6}=\mathbf{3\sqrt{6}}$

(3) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=(x^2)^2+\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2$

$=\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)^2-2\cdot x^2\cdot\dfrac{1}{x^2}$ [F]

$=4^2-2\cdot1=\mathbf{14}$

(4) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2=x^2-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}$ [G]

$=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2\cdot x\cdot\dfrac{1}{x}$

$=4-2\cdot1=2$

$x>1$ より　$0<\dfrac{1}{x}<1$

よって　$x-\dfrac{1}{x}>0$

したがって　$x-\dfrac{1}{x}=\mathbf{\sqrt{2}}$

[D]　基本対称式の値から対称式の値を求める問題と同様に考える。
値を求めたい式を $x+\dfrac{1}{x}$ と $x\cdot\dfrac{1}{x}$ で表す。

[E]
$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$
$x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2)-xy(x+y)$

[F]
$x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2$
$x^4+y^4=(x+y)(x^3+y^3)-xy(x^2+y^2)$

[G]　$(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$

第1講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-3，ウ：3

[解説]

$-4<a<5$ より　$-8<2a<10$ [A]

$-9<2a-1<9$

よって　$\boldsymbol{-3<\dfrac{2a-1}{3}<3}$

[A]
$A<B$ ならば
$A+C<B+C$，$A-C<B-C$
$A<B$，$C>0$ ならば
$AC<BC$，$\dfrac{A}{C}<\dfrac{B}{C}$
$A<B$，$C<0$ ならば
$AC>BC$，$\dfrac{A}{C}>\dfrac{B}{C}$

2

[正解] エオ：-7，カ：4

[解説]

$-4<a<5$ と $-3<b<-1$ の各辺を加えて [B]

$\boldsymbol{-7<a+b<4}$

[B]
$n_1<x<n_2$，$m_1<y<m_2$ のとき
$n_1+m_1<x+y<n_2+m_2$

3

[正解] キクケ：-10，コサ：21

[解説]

$-4<a<5$ より　$-12<3a<15$　……①

$-3<b<-1$ より　$2<-2b<6$　……②

①と②の各辺を加えて [C]

$\boldsymbol{-10<3a-2b<21}$

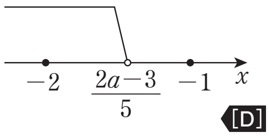
[C]　$A-B=A+(-B)$として考える。

4 [正解] シ：②

[解説]

$2a-5x>3$ より　$-5x>-2a+3$

$$x<\frac{2a-3}{5}$$



これを満たす整数 x の最大値が -2 であることから [D]

$$-2<\frac{2a-3}{5}\leqq -1$$ [E]

$$-10<2a-3\leqq -5$$

$$-7<2a\leqq -2$$

$$\boldsymbol{-\frac{7}{2}<a\leqq -1}$$

[D]　x の値の範囲を数直線で考える。

[E]　$\frac{2a-3}{5}=-1$ のとき不等式の解は $x<-1$ となり，この x の値の範囲を満たす最大の整数は -2 である。
不等号に "＝" をつけるかどうか迷うときは，"＝" としたときに成り立つかどうかを確認してみるとよい。

5 [正解] ス：6，セソ：−4

[解説]

$||x-1|-2|=3$ より　$|x-1|-2=\pm 3$ [F]

すなわち

$$|x-1|-2=3 \quad \text{または} \quad |x-1|-2=-3$$

よって　$|x-1|=5,\ -1$

$|x-1|\geqq 0$ より　$|x-1|=5$

$$x-1=\pm 5$$ [F]

よって　$\boldsymbol{x=6,\ -4}$

[F]　$|A|=\begin{cases} A & (A\geqq 0) \\ -A & (A<0) \end{cases}$

6 [正解] タ：4，チ：3

[解説]

(i)　$x<0$ のとき　$-x-(x-4)<3x$ [G]

$-x-x+4<3x$　　$-5x<-4$　　$x>\dfrac{4}{5}$

$x<0$ を満たさず不適。

(ii)　$0\leqq x<4$ のとき　$x-(x-4)<3x$

$x-x+4<3x$　　$4<3x$　　$x>\dfrac{4}{3}$

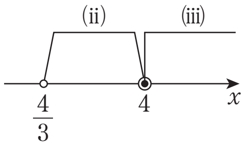
$0\leqq x<4$ との共通範囲は　$\dfrac{4}{3}<x<4$

(iii)　$x\geqq 4$ のとき　$x+(x-4)<3x$

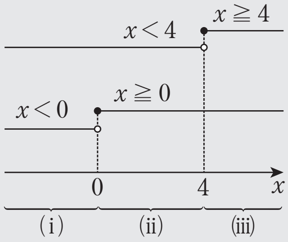
$x+x-4<3x$　　$-x<4$　　$x>-4$

$x\geqq 4$ との共通範囲は　$x\geqq 4$

(i)～(iii)より，求める解は　$\boldsymbol{x>\dfrac{4}{3}}$



[G]　絶対値記号の中の式 x と $x-4$ のそれぞれが，0 以上になる場合と負になる場合で場合分けを行う。



7

[正解] ツ：2，テ：①，ト：③，ナ：②，ニ：②

[解説]

$ax < 2x + 3b$ より　$(a-2)x < 3b$ [H]

(i)　$a > 2$ のとき　$x < \dfrac{3b}{a-2}$

(ii)　$a = 2$ のとき　$0 \cdot x < 3b$

$b > 0$ のとき　解はすべての実数

$b \leqq 0$ のとき　解なし

(iii)　$a < 2$ のとき　$x > \dfrac{3b}{a-2}$

(i)〜(iii)より，求める解は

$a > 2$ のとき　$x < \dfrac{3b}{a-2}$

$a = 2$ かつ $b > 0$ のとき　解はすべての実数

$a = 2$ かつ $b \leqq 0$ のとき　解なし

$a < 2$ のとき　$x > \dfrac{3b}{a-2}$

[H]　x について整理し，x の係数で両辺を割り，左辺を x のみにする。その際，x の係数の符号に注意する。

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：④

[解説]

$x<y \Longrightarrow cx<cy$ は偽

　(反例：$x=1$，$y=2$，$c=-1$)

$cx<cy \Longrightarrow x<y$ は偽

　(反例：$x=-1$，$y=-2$，$c=-1$)

よって，$x<y$ は $cx<cy$ であるための**必要条件でも十分条件でもない。** [A]

2

[正解] イ：③

[解説]

$a>0 \Longrightarrow \sqrt{a^2}=a$ は，明らかに真

$\sqrt{a^2}=a \Longrightarrow a>0$ は偽(反例：$a=0$)

よって，$a>0$ は $\sqrt{a^2}=a$ であるための**十分条件であるが必要条件ではない。** [A]

[A]
$p \Longrightarrow q$ が真であるとき
　p は q であるための十分条件。
$q \Longrightarrow p$ が真であるとき
　p は q であるための必要条件。
$p \Longrightarrow q$ と $q \Longrightarrow p$ がともに真，すなわち，$p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき
　p は q であるための必要十分条件。
$p \Longrightarrow q$，$q \Longrightarrow p$ がともに偽であるとき
　p は q であるための必要条件でも十分条件でもない。

3

[正解] ウ：①

[解説]

$ab+1=a+b$ より　$ab+1-a-b=0$

$a(b-1)-(b-1)=0$　　$(a-1)(b-1)=0$

よって　$a=1$ または $b=1$

これは，a，b のうち少なくとも 1 つは 1 であることと同値である。 [B]

すなわち，次が成り立つ。

$$ab+1=a+b$$
$$\Longleftrightarrow a,\ b \text{ のうち少なくとも 1 つは 1 である}$$

よって，$ab+1=a+b$ は，a，b のうち少なくとも 1 つは 1 であるための**必要十分条件である。** [A]

[B]　$p \Longleftrightarrow q$ が成り立つとき，
p と q は互いに同値であるという。

4 [正解] エ：②

[解説]

$|x-4|>2$ のとき　$x-4<-2$，$2<x-4$

つまり　$x<2$，$6<x$

$|x+1|<3$ のとき　$-3<x+1<3$

つまり　$-4<x<2$

$|x-4|>2 \Longrightarrow |x+1|<3$ は偽（反例：$x=7$）［C］

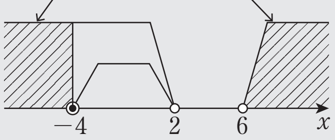
$|x+1|<3 \Longrightarrow |x-4|>2$ は真

よって，$|x-4|>2$ は，$|x+1|<3$ であるための**必要条件であるが十分条件ではない。**［A］

［C］

$|x-4|>2 \Longrightarrow |x+1|<3$

の反例となる部分



5 [正解] オ：③

[解説]

x，y がともに整数 $\Longrightarrow x+y$，xy がともに整数

は，明らかに真

$x+y$，xy がともに整数 $\Longrightarrow x$，y がともに整数

は偽（反例：$x=\sqrt{2}$，$y=-\sqrt{2}$）

よって，x，y がともに整数であることは，$x+y$，xy がともに整数であるための**十分条件であるが必要条件ではない。**［A］

第 2 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：⑥，ウ：①，エ：③

[解説]

「$x+y$ は無理数である」

$\Longrightarrow$「x または y は無理数である」

この命題の対偶は

「x と y はともに有理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は有理数である」……(＊) [A]

有理数と有理数の和は有理数であるから，(＊)は成り立つ。

よって，**対偶が真であるから，もとの命題も真**である。

[A]　命題 $p \Longrightarrow q$ とその対偶 $\overline{q} \Longrightarrow \overline{p}$ の真偽は一致する。
これを利用し，対偶が真であることを示すことで，もとの命題が真であることを証明することができる。

2 **[正解]** オ：③，カ：③，キ：②

[解説]

x は有理数，y は無理数のとき，

$x+y$ が無理数でない，すなわち，

「$x+y$ は**有理数**である」 ……(A)

と仮定する。[B]

p を有理数として $x+y=p$ とすると

$y=p-x$ ……(＊＊)

$p-x$ は**有理数**であるから，(＊＊)は **y が無理数**であることに矛盾する。

ゆえに，(A)の仮定は誤りであるから，$x+y$ は無理数である。

したがって，

「x は有理数，y は無理数である」

$\Longrightarrow$「$x+y$ は無理数である」

は成り立つ。

[B]　背理法
命題の証明において，その命題が成り立たないと仮定し，矛盾を導くことによって，もとの命題が正しいことを証明する方法を背理法という。

第 2 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：①，イ：③，ウ：②

[解説]

命題「ある実数 x について，$x^2+3x+2=0$」について，

$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$ であるから，

$x=-1$ のとき

$$x^2+3x+2=(-1+1)(-1+2)=0$$

よって，この命題は　**真**

命題の否定

「すべての実数 x について，$x^2+3x+2 \neq 0$」 [A]

について，上で調べたように $x=-1$ のとき，

$x^2+3x+2=0$ であるから　**偽** [B]

[A]
・命題「すべての x について p である」の否定は「ある x について $\overline{p}$ である」
・命題「ある x について p である」の否定は「すべての x について $\overline{p}$ である」

[B]　一般に，もとの命題とその否定は真偽が逆になる。すなわち
　もとの命題が真のとき，否定は偽
　もとの命題が偽のとき，否定は真
このことを用いてもよい。

2 **[正解]** エ：②，オ：②，カ：①

[解説]

命題「すべての実数 x について，$x^2-4x+4>0$」について，$x^2-4x+4=(x-2)^2$ であるから，

$x=2$ のとき

$$x^2-4x+4=(2-2)^2=0$$

よって，この命題は　**偽**

命題の否定

「ある実数 x について，$x^2-4x+4 \leqq 0$」 [A]

について，上で調べたように $x=2$ のとき，

$x^2-4x+4=0$ であるから　**真** [B]

3 **[正解]** キ：0，ク：0，ケ：0

[解説]

$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$ が

$x=1$ について成り立つならば [C] [D]

$$a\cdot 0+b\cdot 0+c=0$$

すなわち　$c=0$　……(＊)

$x=2$ について成り立つならば

$$a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=0$$

すなわち　$a+b+c=0$　……(＊＊)

$x=0$ について成り立つならば

$$a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=0$$

すなわち　$a-b+c=0$　……(＊＊＊)

(＊)～(＊＊＊)より　$a=b=c=0$

これは，実数 x に関する等式

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$$

がどんな x の値に対しても成り立つための必要条件である。

$a=b=c=0$ ならば [C]

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c$$
$$=0\cdot(x-1)^2+0\cdot(x-1)+0=0$$

よって，どんな x の値に対しても

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$$

が成り立つ。

ゆえに，$a=b=c=0$ は，実数 x に関する等式

$$a(x-1)^2+b(x-1)+c=0$$

がどんな x の値に対しても成り立つための必要十分条件である。

以上より，求める必要十分条件は

$$\boldsymbol{a=0,\ b=0,\ c=0}$$

[C]
①ある特定の x で成り立つための必要条件をいくつか求めて，どんな x の値に対しても成り立つための必要条件を求める。
②求めた必要条件が，十分条件であることを示す。

[D]　左辺が簡単な式になるような x の値を代入する。

第３講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：2，ウエ：-2，オ：0

[解説]

$x=-2$ のとき　$y=-2a+b$

$x=1$ のとき　$y=a+b$

(i)　$a>0$ のとき [A]

グラフは右上がりの直線となり

$x=-2$ のとき最小値 -2

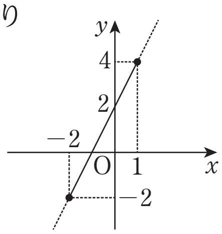
$x=1$ のとき最大値 4

をとるから

$-2a+b=-2$，$a+b=4$

よって　$a=2$，$b=2$

これは $a>0$ を満たす。



(ii)　$a<0$ のとき

グラフは右下がりの直線となり

$x=-2$ のとき最大値 4

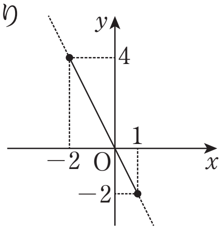
$x=1$ のとき最小値 -2

をとるから

$-2a+b=4$，$a+b=-2$

よって　$a=-2$，$b=0$

これは $a<0$ を満たす。



(iii)　$a=0$ のとき

関数は $y=b$ となり，x の値に関わらず一定の値をとる。よって，最大値と最小値は一致し，不適。

(i)〜(iii)より　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=2}$

または　$\boldsymbol{a=-2}$，$\boldsymbol{b=0}$

[A]　関数 $y=ax+b$ のグラフは直線。a の符号で場合分けをする。
$a>0$（右上がり），$a<0$（右下がり）のいずれの場合も端点で最大値，最小値をとる。

2 [正解] カ：①

[解説]

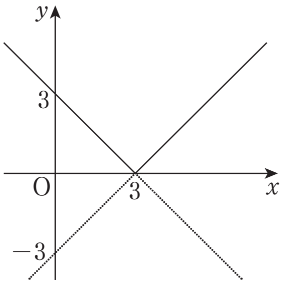
$x-3 \geqq 0$ すなわち $x \geqq 3$ のとき

$$y=x-3$$

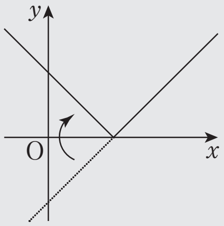
$x-3<0$ すなわち $x<3$ のとき

$$y=-(x-3)=-x+3$$

よって，グラフは下図実線部分。



[B]

> [B]　関数
>
> $$y=|f(x)|=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geqq 0) \\ -f(x) & (f(x)<0) \end{cases}$$
>
> のグラフは $y=f(x)$ のグラフにおいて，x 軸より上側の部分をそのままに，x 軸より下側の部分を x 軸に関して対称に折り返すことで得られる。
>
> 
>

3 [正解] キ：②

[解説]

(ｉ)　$x<-3$ のとき [C]

$$y=-(x+3)-(x-2)=-2x-1$$

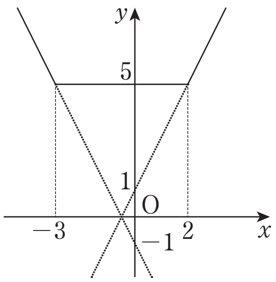
(ⅱ)　$-3 \leqq x<2$ のとき

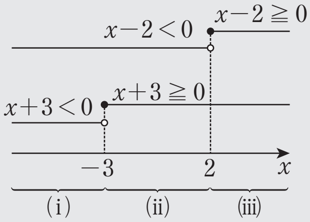
$$y=(x+3)-(x-2)=5$$

(ⅲ)　$2 \leqq x$ のとき

$$y=(x+3)+(x-2)=2x+1$$

(ｉ)〜(ⅲ)より，グラフは下図実線部分。



> [C]　絶対値を２つ以上含む関数のグラフは，場合分けをして絶対値記号をはずす。
>
> 
>

第 3 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：8，エ：2

[解説]

$$y=-2x^2-4x+1=-2(x^2+2x)+1$$
$$=-2\{(x+1)^2-1^2\}+1=-2(x+1)^2+3$$

よって，この放物線の頂点の座標は　$(-1,\ 3)$

この放物線を x 軸方向に 3，y 軸方向に 3 だけ平行移動すると，頂点の座標は　$(-1+3,\ 3+3)$ [A]

すなわち $(2,\ 6)$ に移動する。

したがって，求める放物線の方程式は

$$y=-2(x-2)^2+6$$

すなわち $\boldsymbol{y=-2x^2+8x-2}$

[A]　放物線の平行移動は，頂点の移動に注目する。平行移動しても x^2 の係数は変わらない。

2

[正解] オカ：-3，キクケ：-12，コサ：-4

[解説]

放物線 C は，放物線　$y=-3x^2+6x-1$　を x 軸方向に -3，y 軸方向に 6 だけ平行移動したものである。 [B]

$y=-3x^2+6x-1=-3(x-1)^2+2$　より，この放物線の頂点の座標は　$(1,\ 2)$

よって，放物線 C の頂点の座標は　$(1-3,\ 2+6)$

すなわち $(-2,\ 8)$ である。

したがって，放物線 C の方程式は

$$y=-3(x+2)^2+8=-3x^2-12x-4$$

ゆえに　$\boldsymbol{a=-3,\ b=-12,\ c=-4}$

[B]　移動後の放物線の式が示されているときは，逆向きの平行移動によって移動前の方程式を求めるとよい。

移動前 → 移動後：x 軸：3，y 軸：-6

移動後 → 移動前：x 軸：-3，y 軸：6

3 **[正解]** シ：⑤，ス：①，セ：④

[解説]

$y=3x^2+12x+16=3(x+2)^2+4$ より，この放物線は下に凸であり，頂点の座標は　$(-2,\ 4)$ [C]

x 軸に関する対称移動：頂点は $(-2,\ -4)$ に移動し，上に凸となる。 [C]

よって，求める方程式は　$y=-3(x+2)^2-4$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x^2-12x-16}$

y 軸に関する対称移動：頂点は $(2,\ 4)$ に移動し，下に凸のままである。 [C]

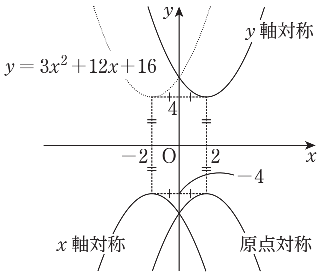
よって，求める方程式は　$y=3(x-2)^2+4$

すなわち　$\boldsymbol{y=3x^2-12x+16}$

原点に関する対称移動：頂点は $(2,\ -4)$ に移動し，上に凸となる。 [C]

よって，求める方程式は　$y=-3(x-2)^2-4$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x^2+12x-16}$



（別解）　x 軸に関する対称移動：

$-y=3x^2+12x+16$ [D]

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x^2-12x-16}$

y 軸に関する対称移動：

$y=3(-x)^2+12(-x)+16$

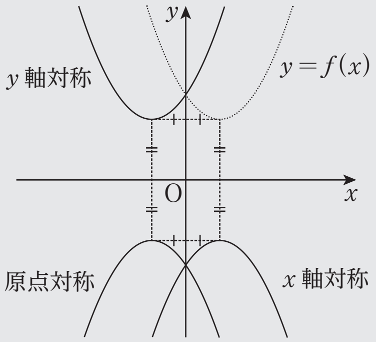
すなわち　$\boldsymbol{y=3x^2-12x+16}$

原点に関する対称移動：

$-y=3(-x)^2+12(-x)+16$

すなわち　$\boldsymbol{y=-3x^2+12x-16}$

[C]　放物線の対称移動は，頂点の移動と，凸方向の変化に注目する。



[D]　次の公式を用いてもよい。
関数 $y=f(x)$ のグラフを x 軸，y 軸，原点に関して対称移動した曲線の方程式は，それぞれ次の通りである。

x 軸：$-y=f(x)$
（y を $-y$ におき換え）

y 軸：$y=f(-x)$
（x を $-x$ におき換え）

原点：$-y=f(-x)$
（x を $-x$ に，y を $-y$ におき換え）

第 3 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：①，イ：①，ウ：①，エ：②，オ：①

[解説]

$$y=ax^2+bx+c$$
$$=a\left\{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right\}+c$$
$$=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}$$

頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a},\ -\frac{b^2-4ac}{4a}\right)$ [A]

（a の符号）

グラフは下に凸であるから　$\boldsymbol{a>0}$ [B]

（b の符号）

軸が y 軸より左にあるから　$-\frac{b}{2a}<0$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{b>0}$ [B]

（c の符号）

$x=0$ のとき $y=c$ であるから，グラフより　$\boldsymbol{c>0}$ [B]

（b^2-4ac の符号）

頂点の y 座標が正であるから　$-\frac{b^2-4ac}{4a}>0$

$a>0$ であるから　$\boldsymbol{b^2-4ac<0}$ [B]

（$a+b+c$ の符号）

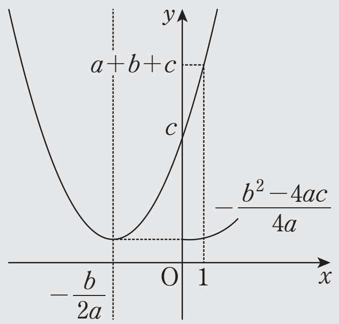
$a+b+c$ は，$x=1$ のときの y 座標である。

グラフより，$x=1$ のとき $y>0$ であるから

$\boldsymbol{a+b+c>0}$ [B]

[A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ の係数 a，b，c や，a，b，c で表された式の値の符号は，グラフの凸方向，頂点（軸）の位置，座標軸との交点などから考える。

[B]



第 4 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：0，イ：④，ウ：1，エ：②，オ：⑥

[解説]

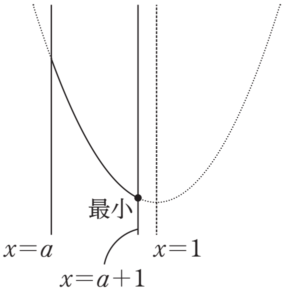
$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は直線 $x=1$

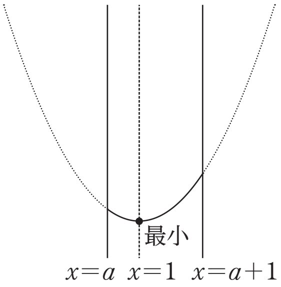
(i)　$a+1<1$ つまり $a<0$ のとき **[A]**

$m(a)=f(a+1)=a^2+2$



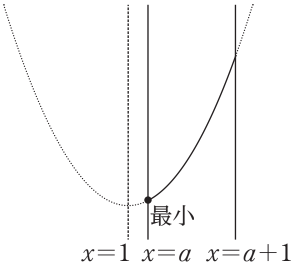
(ii)　$a\leqq 1\leqq a+1$ つまり $0\leqq a\leqq 1$ のとき **[A]**

$m(a)=f(1)=2$

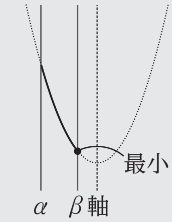


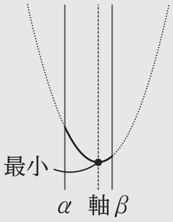
(iii)　$1<a$ のとき **[A]**

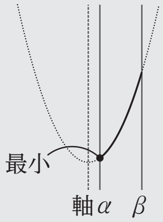
$m(a)=f(a)=a^2-2a+3$



[A]　グラフが下に凸の放物線である 2 次関数 $y=f(x)$ の区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における最小値について，
グラフの軸が
- $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 内にあれば，頂点の y 座標
- $\alpha\leqq x\leqq\beta$ 内になければ，軸に近い方の端点の y 座標







(i)～(iii)より

$a<0$ のとき　　$m(a)=a^2+2$

$0\leqq a\leqq 1$ のとき　$m(a)=2$

$1<a$ のとき　　$m(a)=a^2-2a+3$

2 [正解] カ：1，キ：2，ク：⑥，ケ：①，コ：④

[解説]

$$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$$

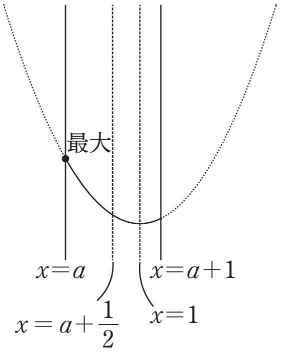
$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，

軸は直線 $x=1$

区間 $a\leqq x\leqq a+1$ の中央は　$x=a+\dfrac{1}{2}$

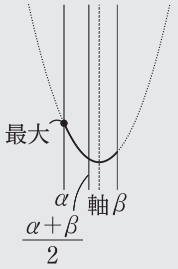
(i)　$a+\dfrac{1}{2}<1$ つまり $a<\dfrac{1}{2}$ のとき [B]

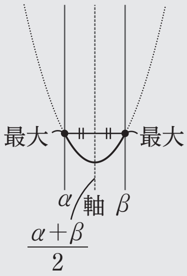
$M(a)=f(a)=a^2-2a+3$

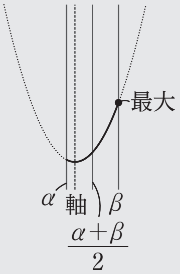


[B]　グラフが下に凸の放物線である 2 次関数 $y=f(x)$ の区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ における最大値は，グラフの軸から遠い方の端点の y 座標

（軸が区間の中央 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ より左か右かによって場合分け）

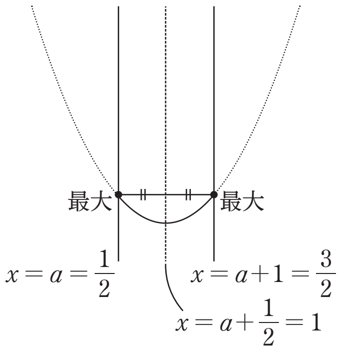






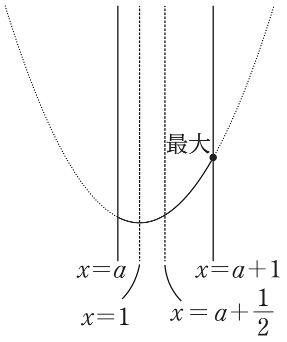
(ii)　$a+\frac{1}{2}=1$ つまり $a=\frac{1}{2}$ のとき ◀[B]

$M(a)=f\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}$



(iii)　$1<a+\frac{1}{2}$ つまり $\frac{1}{2}<a$ のとき ◀[B]

$M(a)=f(a+1)=a^2+2$



(i)〜(iii)より

$\boldsymbol{a<\frac{1}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{M(a)=a^2-2a+3}$

$\boldsymbol{a=\frac{1}{2}}$ **のとき**　$\boldsymbol{M(a)=\frac{9}{4}}$

$\boldsymbol{\frac{1}{2}<a}$ **のとき**　$\boldsymbol{M(a)=a^2+2}$

第 4 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：1，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：1

[解説]

$3x+y=2$ より　$y=2-3x$

これを $3x^2+y^2$ に代入すると [A]

$$3x^2+y^2=3x^2+(2-3x)^2=12x^2-12x+4$$
$$=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$$

よって，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 1 をとる。

$x=\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=2-3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$

したがって　$\boldsymbol{x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{1}{2}}$ **のとき　最小値 1**

[A]　ax^2+by^2 のように，2 つの変数によって値が定まる関数を「2 変数関数」という。条件式がある 2 変数関数の最大，最小は，条件式を用いて 1 つの文字を消去するとよい。

2

[正解] カ：2，キク：−4，ケコ：28，
サ：1，シス：−1，セ：4

[解説]

$y \geqq -4$，$y=2-3x$ より　$2-3x \geqq -4$ [B]

よって　$x \leqq 2$

これと $x \geqq 1$ より　$1 \leqq x \leqq 2$

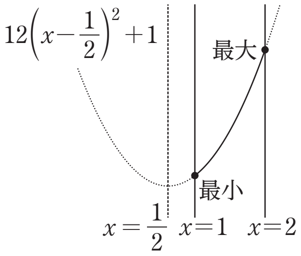
$1 \leqq x \leqq 2$ の範囲において，

$3x^2+y^2=12\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+1$ は，$x=2$ のとき最大値 28，$x=1$ のとき最小値 4 をとる。

$x=2$ のとき　$y=2-3\cdot2=-4$，

$x=1$ のとき　$y=2-3\cdot1=-1$

したがって　**$x=2$，$y=-4$ のとき　最大値 28，**
$x=1$，$y=-1$ のとき　最小値 4



[B]　消去する文字に条件がある場合は，残る文字の条件におき換える。ここでは，y の条件を x におき換えている。

3 **[正解]** ソ：③，タ：②，チ：0，ツ：2

[解説]

$$y=x^4+2x^2+2=(x^2)^2+2x^2+2$$

$$=\boldsymbol{t^2+2t+2}$$ [C]

また，$t=x^2$ より　$\boldsymbol{t \geqq 0}$

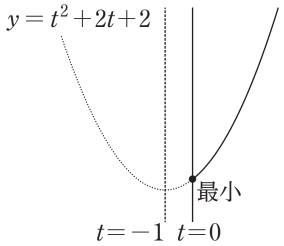
$y=t^2+2t+2$ より

$$y=(t+1)^2+1$$

$t \geqq 0$ の範囲で，y は $t=0$ のとき最小値 2 をとる。

$t=0$ のとき　$x^2=0$　より　$x=0$

したがって　**$x=0$ のとき　最小値 2**



[C]　4 次関数について，$t=x^2$ とおき換えを行うことで，2 次関数として扱うことができる場合がある。おき換えた文字の変域に注意。

第 4 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：5，
カ：2，キ：1，ク：2

[解説]

求める放物線の頂点は直線 $y=-x+3$ 上の点であるから，$(p,\ -p+3)$ とおける。[A]

さらに，求める放物線は放物線 $y=2x^2-1$ を平行移動したものであるから，その方程式は

$$y=2(x-p)^2-p+3$$ [B]

とおける。これが点 $(2,\ 1)$ を通るから

$$1=2(2-p)^2-p+3$$

$$2p^2-9p+10=0$$

$$(p-2)(2p-5)=0$$

よって　$p=2,\ \dfrac{5}{2}$

ゆえに　$-p+3=1,\ \dfrac{1}{2}$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2(x-2)^2+1}\quad \textbf{または}\quad \boldsymbol{y=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

[A]　直線 $y=ax+b$ 上にある点は，$(p,\ ap+b)$ と表される。

[B]　放物線の頂点に関する条件が与えられたときは，$y=a(x-p)^2+q$ の形で考えるとよい。

2

[正解] ケ：2，コサ：12，シス：-2，セ：4

[解説]

$a=0$ のとき　$f(x)=b$

これは x の値に関わらず一定であるから不適。

$a\neq 0$ のとき　$f(x)$ は2次関数である。

$$f(x)=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=2$ であり，

定義域 $1\leqq x\leqq 4$ に含まれる。

$a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。 [C]

よって，最大値は $f(4)=b$，

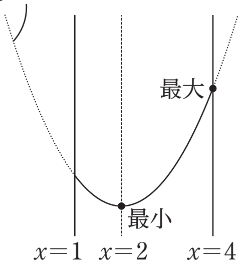
最小値は $f(2)=-4a+b$ であることから

$$b=12,\ -4a+b=4$$

これを解くと

$$a=2,\ b=12$$

これは $a>0$ を満たす。



$a<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線である。

よって，最大値は $f(2)=-4a+b$，

最小値は $f(4)=b$ であることから

$$-4a+b=12,\ b=4$$

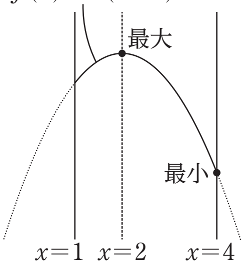
これを解くと

$$a=-2,\ b=4$$

これは $a<0$ を満たす。

以上より

$(a,\ b)=(2,\ 12),\ (-2,\ 4)$



[C]　2次関数の最大・最小に関する条件が与えられたときは，グラフが上に凸か下に凸か，および頂点と端点の座標を考えるとよい。

第 5 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：4

[解説]

$$y=-x^2+2x+8=-\left(x^2-2x-8\right)$$
$$=-(x+2)(x-4) \text{ [A]}$$

よって　**(−2，0)，(4，0)**

[A]　2 次関数 $y=ax^2+bx+c$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標は，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の実数解である。ax^2+bx+c が $a(x-\alpha)(x-\beta)$ と因数分解できるならば，共有点の座標は $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ である。

2

[正解] エオ：-3

[解説]

$$y=-3x^2-18x-27=-3\left(x^2+6x+9\right)$$
$$=-3(x+3)^2 \text{ [A]}$$

よって　**(−3，0)**

3

[正解] カ：6，キ：2，ク：3，ケ：6，コ：2，サ：3

[解説]

$9(x-2)^2-2=0$ より　$(x-2)^2=\dfrac{2}{9}$ [A]

$$x-2=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}$$

ゆえに　$x=2\pm\dfrac{\sqrt{2}}{3}=\dfrac{6\pm\sqrt{2}}{3}$

よって　$\left(\dfrac{6+\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$，$\left(\dfrac{6-\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$

4 [正解] シ：5

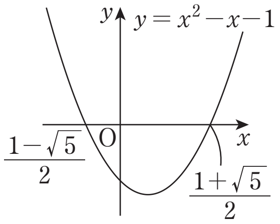
[解説]

$x^2-x-1=0$ を解くと

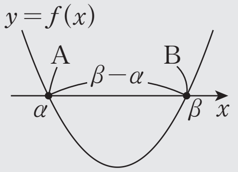
$$x=\frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-1)}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$$

よって，求める線分の長さ l は [B]

$$l=\frac{1+\sqrt{5}}{2}-\frac{1-\sqrt{5}}{2}=\boldsymbol{\sqrt{5}}$$



[B]　グラフが x 軸から切り取る線分の長さは，下図の線分 AB の長さである。α，β（$\alpha<\beta$）は方程式 $f(x)=0$ の解で，$\beta-\alpha$ が求める線分の長さである。



5 [正解] ス：2，セ：4，ソ：6

[解説]

x 軸と 2 点 $(-3,\ 0)$，$(1,\ 0)$ で交わるから，求める放物線の方程式は

$$y=a(x+3)(x-1)$$ [C]

とおける。これが点 $(2,\ 10)$ を通るから

$$10=a\cdot5\cdot1$$

$$a=2$$

よって，求める放物線の方程式は

$$y=2(x+3)(x-1)\quad \text{すなわち}$$

$$\boldsymbol{y=2x^2+4x-6}$$

[C]　2 次関数のグラフ（放物線）と x 軸の共有点の座標 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ がわかっているときは，$y=a(x-\alpha)(x-\beta)$ とおける。

第 5 講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：⑤，イ：⑨，ウ：④

[解説]

$m=0$ のとき [A]

(＊)は　$y=-4x+2$

よって，(＊)のグラフと x 軸の共有点の個数は

1 個

$m \neq 0$ のとき

(＊)は 2 次関数を表す。

2 次方程式 $mx^2-4x+2=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-m\cdot 2=-2m+4$$ [B]

$-2m+4>0$ つまり $m<2$ のとき

$D>0$ より，(＊)のグラフと x 軸の共有点の個数は 2 個

$-2m+4=0$ つまり $m=2$ のとき

$D=0$ より，(＊)のグラフと x 軸の共有点の個数は 1 個

$-2m+4<0$ つまり $m>2$ のとき

$D<0$ より，(＊)のグラフと x 軸の共有点の個数は 0 個

以上より

$m<0$，$0<m<2$ のとき　2 個

$m=0$，2 のとき　1 個

$m>2$ のとき　0 個

[A]　$m=0$ のとき，$mx^2-4x+2=0$ は 1 次方程式であるから，判別式を用いて考えることはできない。そのため，場合分けをして考えておく。

[B]　$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，2 次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の個数は，2 次方程式 $f(x)=0$ の異なる実数解の個数である。判別式 $D=b^2-4ac$ について次表のようにまとめることができる。

D	$f(x)=0$ の実数解の個数	$y=f(x)$ と x 軸の共有点
$D>0$	異なる 2 つの実数解	異なる 2 点で交わる
$D=0$	1 つの実数解（重解）	(1 点で)接する
$D<0$	実数解なし	共有点をもたない

2

[正解] エ：1，オ：0

[解説]

(＊)のグラフが x 軸と接するのは，2次方程式

$mx^2-4x+2=0$ の判別式 D について，

$\dfrac{D}{4}=-2m+4=0$ すなわち $m=2$ のときである。

このとき，(＊)は　$y=2x^2-4x+2=2(x-1)^2$ [C]

よって，求める接点の座標は　**(1，0)**

[C]　2次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸と接するとき，2次方程式 $f(x)=0$ は重解をもち，接点の x 座標はその重解である。

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-6，ウ：3，エオ：-2，カキ：-1

[解説]

共通な実数解を α とおき，2 つの 2 次方程式に代入すると　$\alpha^2-\alpha+k=0$　……①　[A]

$\alpha^2-3\alpha-k-6=0$　……②

> [A]　2 つの 2 次方程式に共通解が存在するとき，その共通解を α とおき，2 つの 2 次方程式にそれぞれ代入して，α と k の連立方程式として解く。

①＋②より，k を消去すると

$2\alpha^2-4\alpha-6=0$　　$\alpha^2-2\alpha-3=0$

$(\alpha-3)(\alpha+1)=0$　　$\alpha=3,\ -1$

(i)　$\alpha=3$ のとき

①より　$k=-3^2+3=-6$

このとき，2 つの 2 次方程式は

$x^2-x-6=0,\ x^2-3x=0$

となり，それぞれの解は

$(x+2)(x-3)=0$　　$x=-2,\ 3$

$x(x-3)=0$　　$x=0,\ 3$

であるから，2 つの 2 次方程式はただ 1 つの共通な実数解 $x=3$ をもつ。[B]

> [B]　求めた値が問題の条件を満たすかどうか（共通解がただ 1 つであるかどうか）の確認が必要。

(ii)　$\alpha=-1$ のとき

①より　$k=-(-1)^2+(-1)=-2$

このとき，2 つの 2 次方程式は

$x^2-x-2=0,\ x^2-3x-4=0$

となり，それぞれの解は

$(x+1)(x-2)=0$　　$x=-1,\ 2$

$(x+1)(x-4)=0$　　$x=-1,\ 4$

であるから，2 つの 2 次方程式はただ 1 つの共通な実数解 $x=-1$ をもつ。[B]

(i)，(ii)より　**$k=-6$，共通解 $x=3$ または**

$k=-2$，共通解 $x=-1$

第 6 講　PART1　確認問題 解答

1

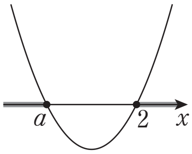
[正解] ア：2，イ：③，ウ：⑤，エ：④

[解説]

$x^2-(a+2)x+2a \geqq 0$ より　$(x-a)(x-2) \geqq 0$

(i)　$a<2$ のとき [A]

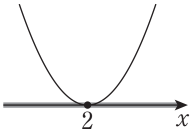
求める解は　$x \leqq a$，$2 \leqq x$



[A]　文字係数の２次不等式は，２次関数のグラフと x 軸の共有点の x 座標 α，β の大小で場合分けを行う。

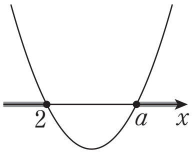
(ii)　$a=2$ のとき

求める解は　すべての実数



(iii)　$2<a$ のとき

求める解は　$x \leqq 2$，$a \leqq x$



(i)〜(iii)より

$a<2$ のとき　$x \leqq a$，$2 \leqq x$

$a=2$ のとき　すべての実数

$a>2$ のとき　$x \leqq 2$，$a \leqq x$

2 **[正解]** オ：2，カ：4

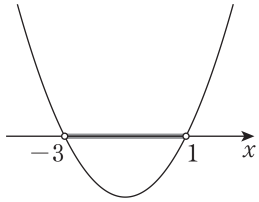
[解説]

条件より，２次関数 $y=ax^2+bx-6$ のグラフは $-3<x<1$ のときだけ x 軸より下側にある。ゆえに，グラフは下に凸であり，x 軸との共有点の x 座標は $x=-3$，1 である。 [B]

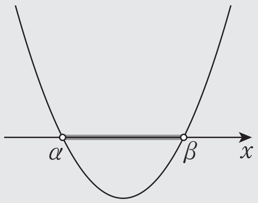
すなわち，$a>0$ かつ２次方程式 $ax^2+bx-6=0$ の２つの解が $x=-3$，1 である。

ゆえに　$a>0$，$9a-3b-6=0$，$a+b-6=0$

よって　$\boldsymbol{a=2}$，$\boldsymbol{b=4}$　（$a>0$ を満たす）



[B]　２次不等式の解から２次不等式の係数を決定する問題では，２次関数のグラフの向きを考えた上で，グラフと x 軸の共有点の x 座標 α，β を２次方程式の解として扱う。



第 6 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑧

[解説]

$f(x)=(a^2-4)x^2-(a-2)x+2$ とおくと

$$f(x)=(a-2)(a+2)x^2-(a-2)x+2 \quad \text{[A]}$$

(i)　$a=2$ のとき

$f(x)=2$ となり，すべての実数 x に対して

$f(x)\geqq 0$ が成り立つ。

(ii)　$a=-2$ のとき

$f(x)=4x+2$ となり，$x<-\dfrac{1}{2}$ のとき

$f(x)<0$ であるから不適。

(iii)　$a\neq\pm 2$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは放物線である。

よって，2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ が成り立つための条件は

$a^2-4>0$　……(＊)　かつ

$D\leqq 0$　……(＊＊) [A]

である。

(＊)より　$(a+2)(a-2)>0$

よって　$a<-2,\ 2<a$

(＊＊)より　$(a-2)^2-4(a-2)(a+2)\cdot 2\leqq 0$

$(a-2)\{(a-2)-8(a+2)\}\leqq 0$

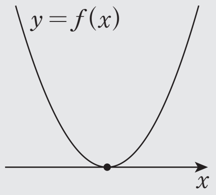
$(a-2)(7a+18)\geqq 0$

よって　$a\leqq -\dfrac{18}{7},\ 2\leqq a$

(＊)かつ(＊＊)より　$a\leqq -\dfrac{18}{7},\ 2<a$

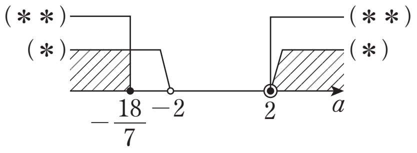
（$a\neq\pm 2$ を満たす）

[A]　すべての実数 x に対して，不等式 $f(x)\geqq 0$ が成り立つのは，$y=f(x)$ のグラフが，x 軸と共有点をもつ場合も含み，つねに x 軸より上側にあるときである。



とくに，$f(x)$ が 2 次関数

$f(x)=ax^2+bx+c$ のときは，$a>0$ かつ $f(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$ のときである。



(i)～(iii)より，求める a の値の範囲は

$$\boldsymbol{a \leqq -\frac{18}{7},\ \ 2 \leqq a}$$

第 6 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：④，ウ：⑥，エ：③

[解説]

$f(x)=x^2-2mx+9$ とおく。 [A]

$f(x)=(x-m)^2-m^2+9$ より，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=m$

２次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

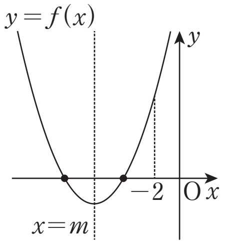
$$\frac{D}{4}=m^2-9$$

２次方程式 $f(x)=0$ が -2 より小さい異なる２つの実数解をもつのは，２次関数 $y=f(x)$ のグラフが x 軸の $x<-2$ の部分と異なる２点で交わるときである。つまり，次の(ⅰ)～(ⅲ)が同時に成り立つときである。

(ⅰ) **$D>0$** [B]

(ⅱ) **軸が $x<-2$ の範囲にある**

(ⅲ) **$f(-2)>0$**



(ⅰ) $\dfrac{D}{4}=m^2-9>0$ より

$$(m+3)(m-3)>0$$

よって　$m<-3,\ 3<m$　……(＊)

(ⅱ) 軸の方程式は $x=m$ であるから

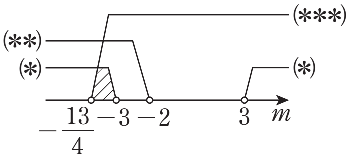
$$m<-2 \quad \cdots\cdots(＊＊)$$

(ⅲ) $f(-2)=4m+13>0$ より

$$m>-\frac{13}{4} \quad \cdots\cdots(＊＊＊)$$

(＊)，(＊＊)，(＊＊＊)の共通範囲を求めて

$$-\frac{13}{4}<m<-3$$



> [A] ２次方程式 $f(x)=0$ の実数解は，２次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸の共有点の x 座標である。

> [B] ２次方程式 $f(x)=0$ の解の存在範囲は，２次関数 $y=f(x)$ のグラフを用いて考えることができる。考えるポイントは次の３点
> (ⅰ) 判別式 D
> (ⅱ) 軸の位置
> (ⅲ) 区間の端点の y 座標の符号

第７講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：③，ウ：③，エ：④，オ：⑥

[解説]

$$f(x)=x^2+2ax+2=(x+a)^2-a^2+2$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸の方程式は $x=-a$

求める条件は２次関数 $f(x)=x^2+2ax+2$ の

$2\leqq x\leqq 4$ における**最小値が正**となることである。[A]

$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最小値は，次の(i)，(ii)に場合分けできる。

(i)　軸 $x=-a$ が **$2\leqq x\leqq 4$ の範囲にあるとき**

最小値は　$f(-a)$

(ii)　(i)以外のとき

最小値は　$f(2)$ または $f(4)$

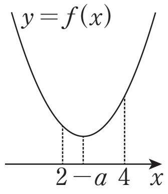
(i)のとき，$2\leqq -a\leqq 4$ すなわち $-4\leqq a\leqq -2$ のとき

$$f(-a)=-a^2+2>0$$

より　$a^2<2$

ゆえに　$-\sqrt{2}<a<\sqrt{2}$

$-2<-\sqrt{2}$ より，これは $-4\leqq a\leqq -2$ を満たさない。



(ii)のとき，すなわち $a<-4$ または $-2<a$ のとき

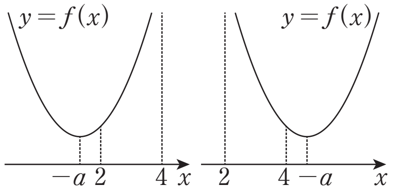
$f(2)=4a+6>0$ かつ $f(4)=8a+18>0$ より

$$a>-\frac{3}{2} \text{ かつ } a>-\frac{9}{4}$$

[A]
ある区間において，つねに $f(x)>0$ が成り立つ
$\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最小値が正
ある区間において，つねに $f(x)<0$ が成り立つ
$\Longleftrightarrow$ ある区間における $f(x)$ の最大値が負

よって　$a>-\dfrac{3}{2}$

これと $a<-4$ または $-2<a$ より　$a>-\dfrac{3}{2}$



(i), (ii)より，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a>-\dfrac{3}{2}}$

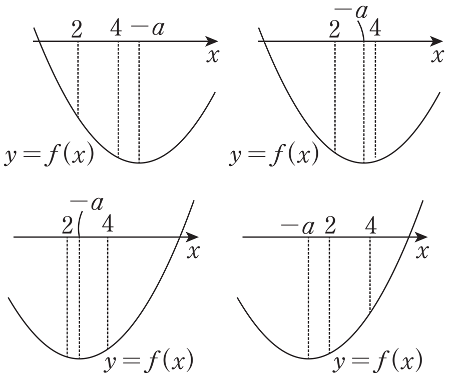
2 [正解] カ：①，キ：④，ク：④，ケ：③

[解説]

$$f(x)=x^2+2ax+2=(x+a)^2-a^2+2$$

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線であり，軸の方程式は $x=-a$

求める条件は 2 次関数 $f(x)=x^2+2ax+2$ の $2\leqq x\leqq 4$ における**最大値**が**負**となることである。[A]



$2\leqq x\leqq 4$ における $f(x)$ の最大値は

　　$f(2)$ または $f(4)$

であるから，

$f(2)=4a+6<0$ かつ $f(4)=8a+18<0$ より

$$a<-\frac{3}{2} \text{ かつ } a<-\frac{9}{4}$$

したがって，求める a の値の範囲は　$\boldsymbol{a<-\dfrac{9}{4}}$

第 7 講　PART2　確認問題 解答

1

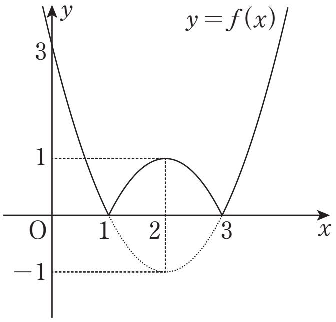
[正解] ア：⑤，イ：⑨，ウ：⑦，エ：①

[解説]

$f(x)=|x^2-4x+3|$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。[A]

$$f(x)=|x^2-4x+3|=|(x-1)(x-3)|$$
$$=|(x-2)^2-1|$$

であり，$y=f(x)$ のグラフは下図の実線部分のようになる。



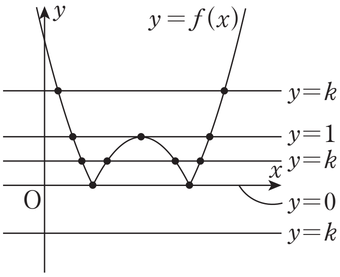
$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べて

$0<k<1$ のとき　4個

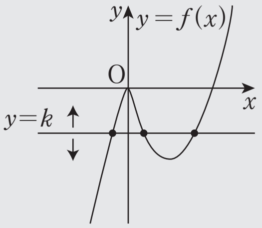
$k=1$ のとき　3個

$k>1$，$k=0$ のとき　2個

$k<0$ のとき　0個



[A]　方程式 $f(x)=k$ の実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。
よって，$y=f(x)$ のグラフに対し，直線 $y=k$ を上下に動かしたときに共有点の個数がどのようになるかを調べる。



2 [正解] オ：③，カ：⑩，キ：⑦，ク：⑧，ケ：①

[解説]

$|x^2-3x|=x-3+k$ より　$|x^2-3x|-x+3=k$ [B]

$f(x)=|x^2-3x|-x+3$ とおくと，求める実数解の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数である。

[B]　定数 k だけを右辺に分離する。こうすると，直線 $y=k$ は x 軸に平行であるから，共有点の個数を調べやすくなる。

$x^2-3x=x(x-3)$ であるから

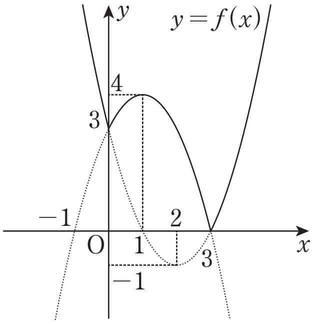
$x\leqq 0$，$3\leqq x$ のとき

$$f(x)=(x^2-3x)-x+3=x^2-4x+3$$
$$=(x-2)^2-1$$

$0<x<3$ のとき

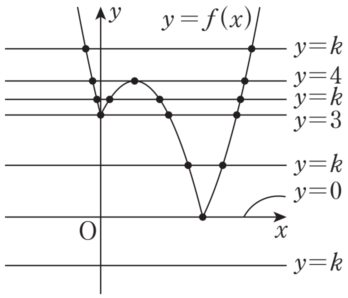
$$f(x)=-(x^2-3x)-x+3=-x^2+2x+3$$
$$=-(x-1)^2+4$$

ゆえに，$y=f(x)$ のグラフは下図の実線部分のようになる。



$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ の共有点の個数を調べて

$3<k<4$ のとき	4個
$k=3$，4 のとき	3個
$0<k<3$，$4<k$ のとき	2個
$k=0$ のとき	1個
$k<0$ のとき	0個


y
y＝f(x)
y＝k
y＝4
y＝k
y＝3
y＝k
y＝0
O
x
y＝k

第７講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：⑤，イ：⑤，ウ：③，エ：⑤，オ：④，
カ：②，キ：③，ク：①，ケ：④

[解説]

$f(x)=x^2-2ax-2a+3$ とおくと

$$f(x)=x^2-2ax-2a+3$$
$$=(x-a)^2-a^2-2a+3$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線で，軸の方程式は $x=a$ である。

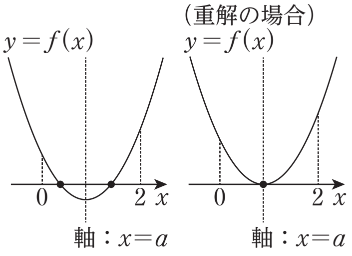
2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=a^2-1\cdot(-2a+3)=a^2+2a-3$$

また　$f(0)=-2a+3$

$$f(2)=2^2-2a\cdot2-2a+3=-6a+7$$

(i)　異なる 2 つの実数解または重解が $0<x<2$ の範囲にあるとき **[A]**



[Ⅰ]　$D\geqq0$ より　$a^2+2a-3\geqq0$

$$(a+3)(a-1)\geqq0$$

よって　$a\leqq-3,\ 1\leqq a$　……(あ)

[Ⅱ]　軸 $x=a$ は $0<x<2$ の範囲にあるから

$$0<a<2\quad……(い)$$

[Ⅲ]　$f(0)>0$ かつ $f(2)>0$ である。

$f(0)>0$ より　$-2a+3>0$

[A]　2 次方程式 $f(x)=0$ が $p<x<q$ に少なくとも 1 つの実数解をもつときは以下の通り。
[1]　$p<x<q$ に 2 つの解（重解含む）をもつ
[2]　$p<x<q$ に一方の解をもち，$x<p$ または $q<x$ にもう一方の解をもつ
[3]　$p<x<q$ に一方の解をもち，もう一方の解が $x=p$ または $x=q$ である
[3] は，$x=p$ または $x=q$ を解にもつとき，それぞれもう一方の解を求め，もう一方の解が $p<x<q$ の範囲にあるかを確認する。

よって　$a<\frac{3}{2}$　……㈲

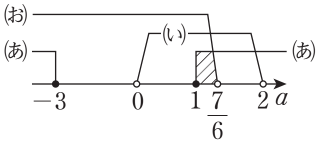
$f(2)>0$ より　$-6a+7>0$

よって　$a<\frac{7}{6}$　……㈳

㈲かつ㈳より　$a<\frac{7}{6}$　……㈵

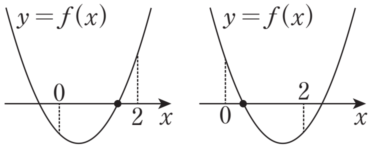
㈠，㈡，㈵の共通範囲を求めて

$1\leqq a<\frac{7}{6}$



(ii)　2 つの解のうち，一方が $0<x<2$ にあり，

もう一方が $x<0$ または $2<x$ にあるとき



$\boldsymbol{f(0)\cdot f(2)<0}$ より　$(-2a+3)(-6a+7)<0$

$(2a-3)(6a-7)<0$

よって　$\frac{7}{6}<a<\frac{3}{2}$

(iii)　解の 1 つが $x=0$ のとき

$f(0)=0$ より　$-2a+3=0$　　よって　$a=\boldsymbol{\frac{3}{2}}$

このとき

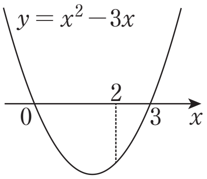
$$f(x)=x^2-2\cdot\frac{3}{2}x-2\cdot\frac{3}{2}+3$$

$$=x^2-3x=x(x-3)$$

よって，2 次方程式 $f(x)=0$ の解は　$x=0$，3

ゆえに，$0<x<2$ に

解をもたないから，不適。



(iv)　解の１つが $x=2$ のとき

$f(2)=0$ より　$-6a+7=0$　　よって　$a=\mathbf{\frac{7}{6}}$

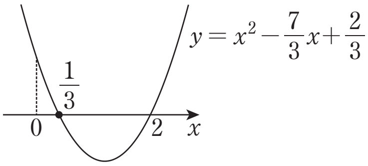
このとき

$$f(x)=x^2-2\cdot\frac{7}{6}x-2\cdot\frac{7}{6}+3$$
$$=x^2-\frac{7}{3}x+\frac{2}{3}$$
$$=\frac{1}{3}(3x^2-7x+2)$$
$$=\frac{1}{3}(x-2)(3x-1)$$

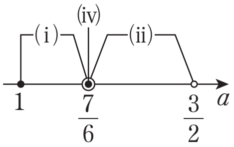
よって，２次方程式 $f(x)=0$ の解は

$$x=2,\ \frac{1}{3}$$

ゆえに，$0<x<2$ に**解を１つもつから，条件を満たす。**



(i)〜(iv)より，求める a の値の範囲は　$\mathbf{1\leqq a<\frac{3}{2}}$



第 8 講　PART1 確認問題 解答

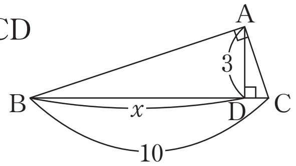
1

[正解] ア：⑤，イ：⑥

[解説]

△ABD ∽ △CAD より

$$BD : AD = AD : CD$$



ゆえに　$BD : 3 = 3 : CD$

よって　$BD \cdot CD = 9$

$BD = x$ とおくと　$CD = 10 - x$

よって　$x(10-x) = 9$

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

$$(x-1)(x-9) = 0$$

$$x = 1,\ 9$$

ここで, $AB > AC$ より　$BD > DA$ かつ $DA > DC$

ゆえに，$BD > DC$ であるから　$BD = 9$，$DC = 1$

△ABD において三平方の定理より

$$AB = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{3^2(3^2+1)} = 3\sqrt{10}$$

よって

$$\sin B = \frac{AD}{AB} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{10}}}$$ [A]

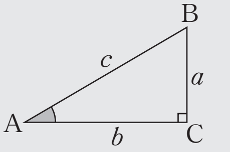
$$\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{9}{3\sqrt{10}} = \boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$$

[A]　下図の直角三角形 ABC において，∠A の大きさを A とすると

$$\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$$

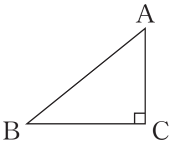


2 [正解] ウ：④，エ：③，オ：④，カ：①，キ：⑥

[解説]

$C=90^\circ$ である直角三角形 ABC

において，A は鋭角である。



$\sin^2 A+\cos^2 A=1$ より [B]

$$\cos^2 A=1-\sin^2 A=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=1-\frac{1}{9}=\frac{8}{9}$$

A は鋭角より，$\cos A>0$ であるから

$$\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

また $\tan A=\dfrac{\sin A}{\cos A}=\dfrac{1}{3}\div\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ [B]

一方，$B=180^\circ-(90^\circ+A)=90^\circ-A$ より

$$\sin B=\sin(90^\circ-A)=\cos A=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$ [C]

$$\cos B=\cos(90^\circ-A)=\sin A=\frac{1}{3}$$

$$\tan B=\tan(90^\circ-A)=\frac{1}{\tan A}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

> [B] 三角比の相互関係
>
> $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
>
> $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$
>
> $1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$

> [C]
>
> $\sin(90^\circ-\theta)=\cos\theta$
>
> $\cos(90^\circ-\theta)=\sin\theta$
>
> $\tan(90^\circ-\theta)=\dfrac{1}{\tan\theta}$

第 8 講　PART2 確認問題 解答

1

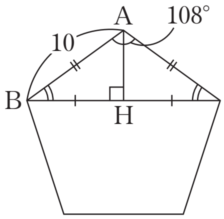
[正解] ア：⑤

[解説]

正五角形の 1 つの内角の大きさは

$\{180^\circ\times(5-2)\}\div 5$

$=108^\circ$ [A]



よって，右図の二等辺三角形 ABC において，$\angle$A の二等分線と辺 BC が交わる点を H とすると [B]

$\angle\mathrm{ABH}=(180^\circ-108^\circ)\div 2=36^\circ$

したがって　$\mathrm{BH}=\mathrm{AB}\cos 36^\circ=10\cos 36^\circ$ [C]

ゆえに，対角線の長さ l は

$l=2\mathrm{BH}=2\cdot 10\cos 36^\circ=20\cdot 0.8090=\mathbf{16.18}$

[A]　正 n 角形の 1 つの内角の大きさは $\{180^\circ\times(n-2)\}\div n$

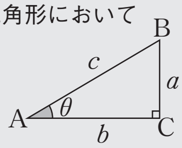
[B]　対角線を含む二等辺三角形に注目。

[C]　右図の直角三角形において

$a=c\sin\theta$

$b=c\cos\theta$

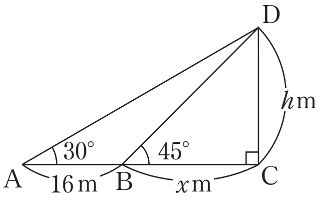
$a=b\tan\theta$



2 ［正解］イ：③

［解説］

木の先端をD，Dから地面に下ろした垂線と地面との交点をCとする。



BC $= x$ (m) とすると

△DCB において

$$CD = BC\tan 45° = x \cdot 1 = x \quad \cdots\cdots(*)$$ ［C］

△ACD において

$$CD = AC\tan 30° = (16+x)\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{16+x}{\sqrt{3}} \quad \cdots\cdots(**)$$

(＊)，(＊＊)より　$x = \dfrac{16+x}{\sqrt{3}}$　　$\sqrt{3}\,x = 16+x$

$$(\sqrt{3}-1)x = 16$$

よって　$x = \dfrac{16}{\sqrt{3}-1} = 8(\sqrt{3}+1) = 8\sqrt{3}+8$

したがって，木の高さ h は，(＊)より

$$h = CD = x = 8\sqrt{3}+8 \text{ (m)}$$

第 8 講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑥

[解説]

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ より [A]

$$\cos^2\theta=1-\sin^2\theta=1-\left(\frac{\sqrt{13}}{7}\right)^2=\frac{36}{49}$$

$0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ$ のとき，$\cos\theta\geqq 0$ であるから [B]

$$\cos\theta=\frac{6}{7}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{13}}{7}\div\frac{6}{7}=\frac{\sqrt{13}}{6}$$ [A]

$90^\circ<\theta\leqq 180^\circ$ のとき，$\cos\theta<0$ であるから [B]

$$\cos\theta=-\frac{6}{7}$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\sqrt{13}}{7}\div\left(-\frac{6}{7}\right)=-\frac{\sqrt{13}}{6}$$ [A]

よって

$$(\cos\theta,\ \tan\theta)=\left(\frac{6}{7},\ \frac{\sqrt{13}}{6}\right),\ \left(-\frac{6}{7},\ -\frac{\sqrt{13}}{6}\right)$$

［A］　三角比の相互関係

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$$

$$1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$$

［B］　三角比の符号

θ	0°	鋭角	90°	鈍角	180°
$\sin\theta$	0	＋	1	＋	0
$\cos\theta$	1	＋	0	－	－1
$\tan\theta$	0	＋	なし	－	0

2 [正解] イ：①

[解説]

$1+\tan^2\theta=\dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より [A]

$$\frac{1}{\cos^2\theta}=1+\left(\frac{5}{12}\right)^2=\frac{144+25}{144}=\frac{169}{144}=\left(\frac{13}{12}\right)^2$$

ゆえに　$\cos^2\theta=\left(\dfrac{12}{13}\right)^2$

$\tan\theta=\dfrac{5}{12}>0$ より，$0^\circ<\theta<90^\circ$ であるから [B]

$$\cos\theta>0$$

よって　$\cos\theta=\dfrac{12}{13}$

また　$\sin\theta=\tan\theta\cos\theta=\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{12}{13}=\dfrac{5}{13}$ [A]

したがって　$(\sin\theta,\ \cos\theta)=\left(\boldsymbol{\dfrac{5}{13}},\ \boldsymbol{\dfrac{12}{13}}\right)$

3 [正解] ウエ：-4，オ：9，カキ：13，クケ：27

[解説]

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ の両辺を２乗して [C]

$$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{9}$$

$$1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{9}$$

よって　$\sin\theta\cos\theta=\boldsymbol{-\dfrac{4}{9}}$

次に　$\sin^3\theta+\cos^3\theta$

$$=(\sin\theta+\cos\theta)^3-3\sin\theta\cos\theta(\sin\theta+\cos\theta)$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)\cdot\frac{1}{3}=\frac{1+12}{27}=\boldsymbol{\frac{13}{27}}$$

> [C]　$\sin\theta+\cos\theta=k$ の形の等式は両辺を２乗し，$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ を利用することで，$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めることができる。
> 他の式の値は，和 $\sin\theta+\cos\theta$ と積 $\sin\theta\cos\theta$ の値を利用することを考える。

4 **[正解]** コサ：17，シ：3，ス：1，セソ：17，タ：6

[解説]

$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より

$$\sin\theta\cos\theta=-\frac{4}{9}\quad\cdots\cdots(*)$$

であるから

$$\begin{aligned}&(\sin\theta-\cos\theta)^2\\&=\sin^2\theta-2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta\\&=1-2\sin\theta\cos\theta=1-2\cdot\left(-\frac{4}{9}\right)=\frac{9+8}{9}\\&=\frac{17}{9}\quad\cdots\cdots(**)\end{aligned}$$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ では $\sin\theta>0$ であるから，$(*)$より

$$\cos\theta<0$$

ゆえに　$\sin\theta-\cos\theta>0$ [D]

[D]　$\sin\theta-\cos\theta$ の符号に注意。

$(**)$より　$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{17}}{3}$

これと $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ について，$\sin\theta$，$\cos\theta$ の連立方程式として解くと

$$\sin\theta=\frac{1+\sqrt{17}}{6},\quad \cos\theta=\frac{1-\sqrt{17}}{6}$$

第９講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：②，イ：⑥

[解説]

正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$ より

$$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$$ [A]

よって，条件より　$a:b:c=1:\sqrt{5}:\sqrt{2}$

したがって，$a=k$，$b=\sqrt{5}\,k$，$c=\sqrt{2}\,k$（$k>0$）とおける。

ゆえに，b が最大の辺であるから，**B が最大の角**である。

また，余弦定理より

$$\cos B=\frac{(\sqrt{2}\,k)^2+k^2-(\sqrt{5}\,k)^2}{2\cdot\sqrt{2}\,k\cdot k}$$

$$=\frac{-2k^2}{2\sqrt{2}\,k^2}=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，最大の角の大きさは　$B=\mathbf{135^\circ}$

[A]　正弦定理

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

より　$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

よって

$a:b:c$

$=2R\sin A:2R\sin B:2R\sin C$

$=\sin A:\sin B:\sin C$

つまり，正弦の値の比は，辺の比である。

また，△ABC において

$a>b>c \Longleftrightarrow A>B>C$

2 [正解] ウ：③，エ：④

[解説]

△ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より

$$\sin A=\frac{a}{2R},\quad \sin B=\frac{b}{2R}$$ [B]

また，余弦定理より

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},\quad \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$$

[B]

これらを与えられた等式

$a^2\cos A\sin B=b^2\cos B\sin A$ に代入すると

$$a^2\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{b}{2R}=b^2\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\cdot\frac{a}{2R}$$

$$a^2(b^2+c^2-a^2)=b^2(c^2+a^2-b^2)$$

$$a^2b^2+a^2c^2-a^4=b^2c^2+b^2a^2-b^4$$

$$a^2c^2-b^2c^2-a^4+b^4=0$$

$$c^2(a^2-b^2)-(a^2+b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(c^2-a^2-b^2)(a^2-b^2)=0$$

$$(c^2-a^2-b^2)(a+b)(a-b)=0$$

$a+b>0$ より　$a^2+b^2=c^2$　または　$a=b$

よって，△ABC は

∠C＝90° の直角三角形　または

BC＝AC の二等辺三角形

> [B]
>
> 正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=2R\Longleftrightarrow\sin A=\dfrac{a}{2R}$
>
> 余弦定理 $\cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$
>
> などを用いて，角を消去し，辺だけの関係式を導き，三角形の形状を調べる。

第 9 講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] ア：⑦，イ：⑦，ウ：③，エ：⑥，オ：①，カ：⑨

[解説]

余弦定理より　$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

$(\sqrt{2})^2=a^2+2^2-2a\cdot 2\cos 30^\circ$

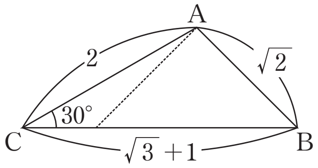
$2=a^2+4-4a\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$a^2-2\sqrt{3}a+2=0$

解の公式より

$a=\sqrt{3}\pm 1$ [A]

(i)　$a=\sqrt{3}+1$のとき



余弦定理より

$\cos B$

$=\dfrac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}+1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}+1)}$ [B]

$=\dfrac{2+4+2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{3}+1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}$

$=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$B=45^\circ$ [C]

ゆえに

$A=180^\circ-(45^\circ+30^\circ)$

$=105^\circ$

[A]　2 辺の長さと，その 2 辺の間ではない角が与えられたとき，三角形が 1 つに定まらないことがある。このようなときは，2 通りの三角形を求める必要がある。

[B]　余弦定理

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

$\Longleftrightarrow \cos A=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

[C]　B を正弦定理で求める別解

$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$

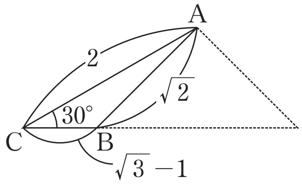
$\dfrac{2}{\sin B}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sin 30^\circ}$

$\sin B=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって　$B=45^\circ$，135°

(ii)　$a=\sqrt{3}-1$のとき

余弦定理より



$\cos B$

$$=\frac{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-1)^2-2^2}{2\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{2+4-2\sqrt{3}-4}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=\frac{-2(\sqrt{3}-1)}{2\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって　$B=135°$ [C]

ゆえに　$A=180°-(135°+30°)=15°$

(i), (ii)より

$\boldsymbol{a=\sqrt{3}+1,\ A=105°,\ B=45°}$　または

$\boldsymbol{a=\sqrt{3}-1,\ A=15°,\ B=135°}$

第 9 講　PART3 確認問題 解答

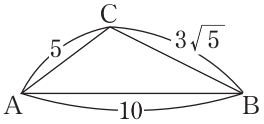
1

[正解] アイ：15，ウ：5，エ：5，オ：2，カ：5，

キ：5，ク：2

[解説]

余弦定理より



$$\cos A$$

$$=\frac{5^2+10^2-(3\sqrt{5})^2}{2\cdot 5\cdot 10}$$

$$=\frac{25+100-45}{2\cdot 5\cdot 10}=\frac{80}{2\cdot 5\cdot 10}=\frac{4}{5}$$

$0^\circ < A < 180^\circ$ より，$\sin A>0$であるから

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\frac{3}{5}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\cdot \mathrm{AB}\cdot \mathrm{AC}\cdot \sin A=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 5\cdot \frac{3}{5}=\mathbf{15}$$

[A]

> [A]　△ABCの面積を S とすると
>
> $$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ca\sin B$$
>
> $$=\frac{1}{2}ab\sin C$$

また，$S=\frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA})$ より [B]

> [B]　△ABCの面積を S，内接円の半径を r とすると
>
> $$S=\frac{1}{2}r(a+b+c)$$

$$15=\frac{1}{2}r(10+3\sqrt{5}+5)$$

よって

$$r=\frac{15\cdot 2}{3\sqrt{5}+15}=\frac{15\cdot 2}{3\sqrt{5}(1+\sqrt{5})}=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}+1}$$

$$=\frac{2\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)}{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-1)}=\frac{10-2\sqrt{5}}{5-1}$$

$$=\mathbf{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$$

さらに，正弦定理より

$$R=\frac{\mathrm{BC}}{2\sin A}=3\sqrt{5}\div\left(2\cdot\frac{3}{5}\right)=\mathbf{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

（面積 S の別解）

$a=3\sqrt{5}$，$b=5$，$c=10$ より，

$s=\dfrac{1}{2}(3\sqrt{5}+5+10)=\dfrac{3\sqrt{5}+15}{2}$ とおくと，ヘロンの公式から [C]

$$S=\sqrt{\frac{3\sqrt{5}+15}{2}\cdot\frac{-3\sqrt{5}+15}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}+5}{2}\cdot\frac{3\sqrt{5}-5}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{\{15^2-(3\sqrt{5})^2\}\{(3\sqrt{5})^2-5^2\}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{180\cdot 20}=\frac{60}{4}=\mathbf{15}$$

[C]　ヘロンの公式
△ABC の面積を S，$2s=a+b+c$ とすると

$$S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

（外接円の半径 R の別解）

$S=\dfrac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}{4R}$ より [D]

$$R=\frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{BC}\cdot\mathrm{CA}}{4S}=\frac{10\cdot 3\sqrt{5}\cdot 5}{4\cdot 15}=\boldsymbol{\frac{5\sqrt{5}}{2}}$$

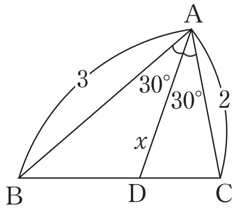
[D]　△ABC の面積を S，外接円の半径を R とすると

$$S=\frac{abc}{4R}$$

第10講　PART1 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：6，イ：3，ウ：5

[解説]



AD は∠A の二等分線であるから

$$\angle\mathrm{BAD}=\angle\mathrm{CAD}=\frac{60^\circ}{2}=30^\circ$$

AD $=x$とおく。

△ABC＝△ABD＋△ACDより **[A]**

$$\frac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin60^\circ=\frac{1}{2}\cdot3\cdot x\sin30^\circ+\frac{1}{2}\cdot2\cdot x\sin30^\circ$$

$$3\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3\cdot x\cdot\frac{1}{2}+2\cdot x\cdot\frac{1}{2}$$

$$5x=6\sqrt{3}$$

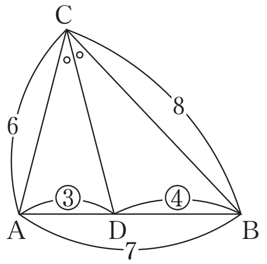
$$x=\frac{6\sqrt{3}}{5}$$

よって　AD $=\boldsymbol{\frac{6\sqrt{3}}{5}}$

[A]　二等分する前の角，二等分したあとの角がともに有名角の場合，角の二等分線の長さは三角形の面積を利用して求めるとよい。

2 [正解] エ：6

[解説]



CD は ∠C の二等分線であるから

$$\mathrm{AD:BD=CA:CB}=6:8=3:4$$ [B]

よって　$\mathrm{AD}=\dfrac{3}{7}\mathrm{AB}=\dfrac{3}{7}\cdot7=3$

△ABC で余弦定理より

$$\cos A=\frac{6^2+7^2-8^2}{2\cdot6\cdot7}=\frac{21}{2\cdot6\cdot7}=\frac{1}{4}$$ [C]

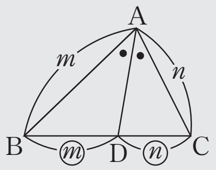
△ACD で余弦定理より

$$\mathrm{CD}^2=6^2+3^2-2\cdot6\cdot3\cdot\frac{1}{4}=36$$

CD > 0 より　CD = **6**

[B]　角の二等分線の性質
△ABC において，AD が ∠A の二等分線のとき

$$\mathrm{BD:DC=AB:AC}$$



[C]　△ABC において求めた余弦の値を，△ACD に適用する。

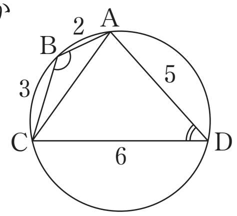
第10講　PART2 確認問題 解答

1

[正解] アイ：21，ウ：6，エ：5

[解説]

四角形 ABCD は円に内接するから



$D=180°-B$ [A]

△ABC で余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cos B$$
$$=13-12\cos B \quad \cdots\cdots① \text{ [B]}$$

△ADC で余弦定理より

$$\mathrm{AC}^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cos(180°-B)$$
$$=61+60\cos B \quad \cdots\cdots② \text{ [B] [A]}$$

①，②より　$13-12\cos B=61+60\cos B$

ゆえに　$\cos B=-\dfrac{48}{72}=-\dfrac{2}{3}$

このとき，①より

$$\mathrm{AC}^2=13-12\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=21$$

$\mathrm{AC}>0$ より　$\mathrm{AC}=\boldsymbol{\sqrt{21}}$

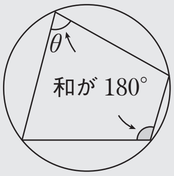
また，$0°<B<180°$ より，$\sin B>0$ であるから

$$\sin B=\sqrt{1-\cos^2 B}=\sqrt{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{5}{9}}$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

よって，四角形 ABCD の面積 S は

$$S=\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ADC} \text{ [C]}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot3\sin B+\frac{1}{2}\cdot5\cdot6\sin(180°-B) \text{ [A]}$$
$$=3\sin B+15\sin B=18\cdot\frac{\sqrt{5}}{3}=\boldsymbol{6\sqrt{5}}$$

[A]
円に内接する四角形の対角の和は 180°



また
$\sin(180°-\theta)=\sin\theta$
$\cos(180°-\theta)=-\cos\theta$

[B]　2 つに分けた三角形それぞれで，余弦定理により対角線の長さを式で表す。
対角線の長さと余弦の値に関する連立方程式を解くことで対角線の長さ（および余弦の値）を得る。

[C]　円に内接する四角形の面積は，対角線によって分けられた 2 つの三角形の面積の和として求める。

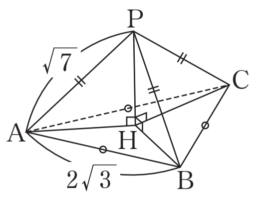
第10講 PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：3，イ：3

[解説]

頂点 P から△ABC に垂線 PH を下ろすと，直線 PH は平面 ABC 上のすべての直線と垂直である。



△PAH，△PBH，△PCH について [A]

$$\angle PHA = \angle PHB = \angle PHC = 90^\circ$$

$$PA = PB = PC$$

PH 共通

であるから　△PAH≡△PBH≡△PCH [B]

よって　AH＝BH＝CH

したがって，点 H は△ABC の外接円の中心であり，AH，BH，CH はその外接円の半径である。

△ABC で正弦定理より　$2AH = \dfrac{2\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ [C]

よって　$AH = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3} \div \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 2$

ゆえに，△PAH で三平方の定理より

$$PH = \sqrt{PA^2 - AH^2} = \sqrt{(\sqrt{7})^2 - 2^2} = \sqrt{3}$$

高さ $h = PH$ であるから　$h = \sqrt{3}$

また

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin 60^\circ$$

$$= 6\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

したがって，四面体 PABC の体積 V は

$$V = \frac{1}{3}\cdot\triangle ABC\cdot PH = \frac{1}{3}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 3$$

[A]　四面体 PABC の対称性を利用する。すなわち，PA＝PB＝PC であることや，底面の △ABC が正三角形であることを利用する。

[B]　直角三角形の合同条件「斜辺と他の 1 辺が等しい」による。

[C]　△ABC は正三角形であるから，1 つの内角は 60°

第11講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：①，ウ：①

[解説]

箱ひげ図から，次のことが読み取れる。 [A]

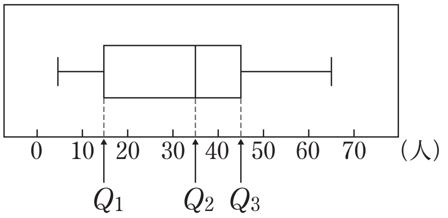
(i)・最大値は60人以上70人未満

・最小値は0人以上10人未満

(ii)・第1四分位数 Q_1 は10人以上20人未満

・第2四分位数 Q_2 は30人以上40人未満

・第3四分位数 Q_3 は40人以上50人未満



ヒストグラム(A)，(B)，(C)はすべて(i)を満たしている。

(A)・データの大きさは33

・Q_2 は下から17番目の値で20人以上30人未満

この値は(ii)を満たさず不適。

よって，(A)は(ii)を満たさないから正しくない。

(B)・データの大きさは27

・Q_1 は下から7番目の値で10人以上20人未満

・Q_2 は下から14番目の値で30人以上40人未満

・Q_3 は下から21番目の値で40人以上50人未満

これらの値は(ii)を満たす。

よって，(B)は(i)，(ii)を満たすから正しい。

(C)・データの大きさは30

・Q_1 は下から8番目の値で10人以上20人未満

・Q_2 は下から15番目と16番目の値の平均値で30人以上40人未満

・Q_3 は下から23番目の値で40人以上50人未満

[A]　箱ひげ図とヒストグラムの対応を調べる問題では，箱ひげ図，ヒストグラムそれぞれからデータの最大値，最小値，四分位数を読み取り，それらが矛盾していないかどうかを調べればよい。

これらの値は(ii)を満たす。

よって，(C)は(i)，(ii)を満たすから正しい。

以上より　(A)　**誤**，(B)　**正**，(C)　**正**

2 [正解] エ：①，オ：②，カ：①

[解説]

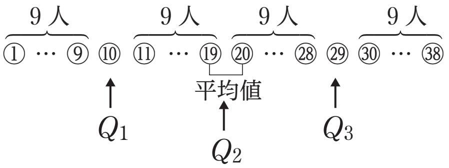
(Ⅰ)について

範囲，四分位範囲ともにB組が最も小さい。

よって，(Ⅰ)は正しい。

(Ⅱ)について

A組，B組ともに，中央値は60点より小さく，下から19番目と20番目の値の平均値であるから，60点以下の生徒は少なくとも19人，すなわち19人以上である。ゆえに，B組では18人未満という記述は不適。よって，(Ⅱ)は正しくない。



[B]

(Ⅲ)について

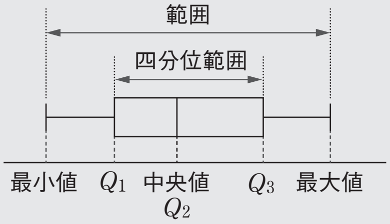
B組のデータの第1四分位数Q_1は40点より大きく，下から10番目の値であるから，40点以下の生徒は9人以下である。

C組のデータのQ_1は40点であり，下から10番目の値であるから，40点以下の生徒は10人以上である。

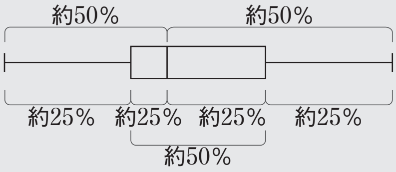
よって，40点以下の生徒は，C組よりB組の方が少ないから，(Ⅲ)は正しい。

以上より　(Ⅰ)　**正**，(Ⅱ)　**誤**，(Ⅲ)　**正**

[B]　箱ひげ図から，データの最大値，最小値，四分位数を読み取ることができ，そこから範囲，四分位範囲といったデータの散らばりの度合いがわかる。



また，データの個数の分布を読み取ることができる。



どの範囲に何個のデータがあるか，模式図をかいて確認しながら考えよう。

第11講　PART2 確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イウエ：766，オカ：10，

キクケ：640

[解説]

$u=\dfrac{x-750}{8}$ とおくと，$x-750$，u，u^2 の値は以下のようになる。［A］

x	798	750	774	782	726	計
$x-750$	48	0	24	32	-24	80
u	6	0	3	4	-3	10
u^2	36	0	9	16	9	70

よって　$\overline{u}=\dfrac{10}{5}=\mathbf{2}$

$u=\dfrac{x-750}{8}$ より　$x=8u+750$

したがって

$$\overline{x}=8\overline{u}+750=8\cdot 2+750=\mathbf{766}$$

また

$$s_u{}^2=\overline{u^2}-(\overline{u})^2=\frac{70}{5}-2^2=14-4=\mathbf{10}$$ ［B］

よって

$$s_x{}^2=8^2s_u{}^2=8^2\cdot 10=\mathbf{640}$$

［A］　$u=\dfrac{x-b}{a}$ $(x=au+b)$ とおくと

平均値　$\overline{x}=a\overline{u}+b$

分散　$s_x{}^2=a^2s_u{}^2$

標準偏差　$s_x=|a|s_u$

が成り立つ。

これを利用すると，変量 u の平均値，分散，標準偏差から変量 x のそれらを求めることができる。

［B］　分散の公式

$s_u{}^2=\overline{u^2}-(\overline{u})^2$

（2 乗の平均）－（平均の 2 乗）

第11講　PART3 確認問題 解答

1

[正解] ア：2

[解説]

番号4のxの値を50から62に修正すると，xの総和は12増加する。【A】

よって，修正前のxの総和をsとすると，修正後のxの平均値は　$\dfrac{s+12}{6}=\dfrac{s}{6}+2$

したがって，修正前のxの平均値$\dfrac{s}{6}$より2増加する。

[A]　(平均値) $=\dfrac{(\text{データの総和})}{(\text{データの大きさ})}$ であるから，データの修正による平均値の変化について考えるときは，データの総和がどれだけ変化したかに注目する。

2

[正解] イ：①，ウ：③

[解説]

(i)　番号1のyの値を50から53に，番号5のyの値を44から41に修正すると，yの総和は変化せず，yの平均値も45から変化しない。

修正した2つのデータについて，偏差の2乗の和は

$$(53-45)^2+(41-45)^2=64+16=80$$ 【B】

となり，修正前の偏差の2乗の和

$$(50-45)^2+(44-45)^2=25+1=26$$

と比べて増加するから，修正後のyの分散は修正前と比べて**増加する**。

(ii)　追加するデータのxの値60，yの値45は，それぞれx，yの平均値と一致している。

よって，このデータを追加するとx，yともに平均値は変化しない。

したがって，追加前のx，yの偏差の2乗の和をそれぞれX，Yとすると，追加後の

xの偏差の2乗の和は　$X+(60-60)^2=X$ 【B】

yの偏差の2乗の和は　$Y+(45-45)^2=Y$

[B]

変量xの分散

$$s_x{}^2=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})^2+(x_2-\overline{x})^2+\cdots+(x_n-\overline{x})^2\}$$

…(偏差)^{2}の平均値

2つの変量xとyの共分散

$$s_{xy}=\frac{1}{n}\{(x_1-\overline{x})(y_1-\overline{y})+(x_2-\overline{x})(y_2-\overline{y})+\cdots+(x_n-\overline{x})(y_n-\overline{y})\}$$

…偏差の積の平均値

2つの変量xとyの相関係数

$$r=\frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

$\cdots\dfrac{(x\text{と}y\text{の共分散})}{(x\text{の標準偏差})(y\text{の標準偏差})}$

となり，ともに変化しない。

また，追加前の x と y の偏差の積の和を S とすると，追加後の偏差の積の和は

$$S+(60-60)(45-45)=S$$

となり，変化しない。

したがって，x と y の相関係数は

追加前：$\dfrac{\frac{S}{6}}{\sqrt{\frac{X}{6}}\sqrt{\frac{Y}{6}}}=\dfrac{S}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}$ 【B】

追加後：$\dfrac{\frac{S}{7}}{\sqrt{\frac{X}{7}}\sqrt{\frac{Y}{7}}}=\dfrac{S}{\sqrt{X}\sqrt{Y}}$

となり，追加前と比べて**変化しない**。

[MEMO]

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。